ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

ADIUVANTIBUS
L. KALMÂR, L. RÉDEI ET K. TANDORI
REDIGIT
B. SZ.-NAGY

TOMUS XXX
FASC. 3—4

SZEGED, 1969
INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

A JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM KÖZLEMÉNYEI

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

KALMÁR LÁSZLÓ, RÉDEI LÁSZLÓ ÉS TANDORI KÁROLY
KÖZREMŰKÖDÉSÉVEL
SZERKESZTI

SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA

30. KÖTET
3.—4. FÜZET

SZEGED, 1969. DECEMBER

JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM BOLYAI-INTÉZETE

ACTA UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

ADIUVANTIBUS

L. KALMÁR, L. RÉDEI ET K. TANDORI

REDIGIT

B. SZ.-NAGY

TOMUS XXX

FASC. 3—4

1969

SZEGED, 1969

INSTITUTUM BOLYAIANUM UNIVERSITATIS SZEGEDIENSIS

A JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM KÖZLEMÉNYEI

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

KALMÁR LÁSZLÓ, RÉDEI LÁSZLÓ ÉS TANDORI KÁROLY
KÖZREMŰKÖDÉSÉVEL
SZERKESZTI
SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA

30. KÖTET
3.—4. FÜZET

1969

SZEGED, 1969. DECEMBER

JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM BOLYAI-INTÉZETE

INDEX — TARTALOM

TOMUS XXX — 1969 — 30. KÖTET

BIBLIOGRAPHIE

Über den Logarithmus abgeschlossener Operatoren in Banachschen Räumen

Von VOLKER NOLLAU in Dresden (DDR)

Es sei A ein abgeschlossener linearer Operator im Banachraum X, dessen Definitionsbereich $\mathfrak{D}(A)$ in X dicht liegt. Wir sagen, A sei vom Typ (M), wenn die negative reelle Achse (ausschließlich des Nullpunktes) zur Resolventenmenge $\varrho(A)$ gehört, und eine positive Konstante M existiert, so daß die Resolvente $R(-\lambda; A) = (A+\lambda I)^{-1}$ für alle $\lambda>0$ der Bedingung $\|R(-\lambda; A)\| \leqq M\lambda^{-1}$ genügt.

Wie man leicht sieht, gilt für den Logarithmus $\log(A)$ eines beschränkten und beschränkt invertierbaren Operators A vom Typ (M)

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\alpha}(A^{\alpha}-I) = \log(A) \quad {}^{1})$$

(Lemma 1). Das Anliegen dieser Mitteilung besteht darin, eine Verallgemeinerung dieser Beziehung für einen Operator A vom Typ (M), dessen Wertebereich $\mathfrak{R}(A)$ dicht in X liegt, anzugeben. Wir zeigen, daß $\lim\limits_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\alpha}(A^{\alpha}x-x)$ auf einer dichten Teilmenge existiert und leiten daraus eine Definition des Logarithmus $\log(A)$ eines Operators vom Typ (M) her. (Abschnitt 2.)

Ausgehend von einer Integraldarstellung des Logarithmus geben wir anschließend einige Zusammenhänge zwischen den Operatoren $A^{\alpha}\,(0 \leqq \alpha < \infty)$ und $\log(A)$ an, wie sie aus der Theorie der starkstetigen Halbgruppen beschränkter Operatoren bekannt sind (vgl. z. B. [5]) (Satz 4). Außerdem beweisen wir im Abschnitt 3 einige Analogien zu den als Logarithmengesetze bezeichneten Eigenschaften der Funktion $f(z)=\log z$. Im vierten Abschnitt wird eine Integraldarstellung der Resolvente $(\log(A)-zI)^{-1}$ für $|\mathrm{Im}\, z|>\pi$ angegeben. Schließlich beschäftigen wir uns im Abschnitt 5 mit dem Logarithmus abgeschlossener maximal accretiver Operatoren im Hilbertraum (diese Operatoren sind vom Typ (M) $(M=1)$) und zeigen, daß die

---

[1]) A^{α} und $\log(A)$ seien dabei durch den Riesz-Dunfordschen Funktionalkalkül [5] definiert (vgl. z. B. auch [6]).

von uns angegebene Definition sich als Spezialfall des Funktionalkalküls von SZ.-NAGY und FOIAŞ [14] für Kontraktionen erweist.

1. Als Potenz A^α $(0<\alpha<1)$ eines Operators A vom Typ (M) definieren wir wie BALAKRISHNAN in seiner grundlegenden Arbeit [2] die Abschließung des durch das Integral $\frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty \eta^{\alpha-1} R(-\eta; A) A x \, d\eta$ $(x \in \mathfrak{D}(A))$ gegebenen linearen Operators; A^0 sei die identische Abbildung I, $A^1 = A$ und $A^\alpha = A^{[\alpha]} A^{\alpha-[\alpha]}$ für $\alpha > 1$.[2]) Einige Eigenschaften der Operatoren A^α $(0 \leqq \alpha < \infty)$, die in [10] bewiesen werden und im Weiteren benötigt werden, geben wir im Folgenden ohne Beweis an.

Es sei A ein Operator vom Typ (M), dann gilt:

(1.1) $$A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta} \qquad (\alpha, \beta \geqq 0);$$

(1.2) für $0 \leqq \alpha \leqq 1$ ist A^α wiederum vom Typ (M) und $(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta}$ $(\beta \geqq 0)$;

(1.3) $$\mathfrak{D}(A^\alpha) \supset \mathfrak{D}(A^\beta) \text{ und } \mathfrak{R}(A^\alpha) \supset \mathfrak{R}(A^\beta) \qquad (\alpha \leqq \beta);$$

(1.4) $$A^\alpha x = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty \eta^{\alpha-1} A R(-\eta; A) x \, d\eta \qquad (x \in \mathfrak{D}(A^{\alpha'});\ 0<\alpha<\alpha' \leqq 1);$$

(1.5) $$\|A^\alpha R(-\eta; A)\| \leqq K(\alpha) \eta^{\alpha-1}$$
$$\left(K(\alpha) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha(1-\alpha)} M(1+M);\ \eta>0;\ 0<\alpha<1\right);$$

(1.6) $$A^\alpha R(-\eta; A) \supset R(-\eta; A) A^\alpha \qquad (\eta>0;\ \alpha \geqq 0);$$

(1.7) $$\text{für } x \in \bigcup_{\alpha>0} \mathfrak{D}(A^\alpha) \text{ ist } \lim_{\alpha \downarrow 0} A^\alpha x = x;$$

(1.8) $$0 \notin \sigma_p(A^\alpha) \qquad (0 \leqq \alpha \leqq 1).$$

2. Lemma 1. *Ist A ein beschränkter und beschränkt invertierbarer Operator vom Typ (M), so gilt*

(2.1) $$\lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\alpha}(A^\alpha - I) = \log(A) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C \log z \, R(z; A) \, dz \text{ }^{3)}$$

und

(2.2) $$\log(A) = \int_0^\infty (1+\eta)^{-1} (A-I)(A+\eta I)^{-1} \, d\eta.$$

---

[2]) Unter $[\alpha]$ verstehen wir die größte ganze Zahl, die kleiner als α ist.

[3]) Dabei denkt man die komplexe Ebene längs der negativen reellen Halbachse aufgeschnitten und es wird $\log z = \log |z| + i \arg z$ $(-\pi \leqq \arg z < \pi)$ definiert. C ist eine geschlossene Kontur (vgl. [5]), die das Spektrum $\sigma(A)$ genau einmal umschließt und in $\varrho(A)$ verläuft.

Beweis. Die Gleichung (2. 1) ergibt sich auf Grund der Vertauschbarkeit von Differentiation und Integration (vgl. [3])

$$\frac{d}{d\alpha}\oint_C z^\alpha R(z;A)\,dz = \oint_C \frac{d}{d\alpha} z^\alpha R(z;A)\,dz = \oint_C z^\alpha \log z \; R(z;A)\,dz,$$

d. h., es gilt

$$\lim_{\alpha\downarrow 0}\frac{1}{\alpha}(A^\alpha - I) = \log(A) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_C \log z \; R(z;A)\,dz.$$

Wir wählen nun in (2. 1) als Integrationsweg die Kontur C, die aus den Kurven $\mathrm{R}e^{i\varphi}$ $(-\pi<\varphi<\pi)$, $-\eta$ $(R\geqq\eta\geqq\varepsilon)$, $\varepsilon e^{i\varphi}$ $(\pi>\varphi>-\pi)$ und $-\eta(\varepsilon\leqq\eta\leqq R)$ besteht. Dabei seien $\varepsilon>0$ und $R>0$ so gewählt, daß $\sigma(A)$ innerhalb C liegt und C in $\varrho(A)$ verläuft. Wir bemerken ferner, daß auf Grund des Cauchyschen Integralsatzes

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_C (z-1)^{-1}\log z\,dz = \log 1 = 0$$

ist. Es gilt folglich

$$\log(A) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_C \log z\big(R(z;A)+(z-1)^{-1}I\big)\,dz.$$

Die Darstellung (2. 2) von $\log(A)$ ergibt sich aus diesem Integral, wenn man den Integrationsweg in der Weise deformiert, daß $\varepsilon\to 0$ und $R\to\infty$ geht.

Definition 1. Es seien A ein Operator vom Typ (M), $\mathfrak{D}(\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha'>\alpha}\mathfrak{D}(A^{\alpha'})$ $\mathfrak{R}(\beta) = \bigcup\limits_{\beta'>\beta}\mathfrak{R}(A^{\beta'})$, $\mathfrak{M}(\alpha,\beta) = \mathfrak{D}(\alpha)\cap\mathfrak{R}(\beta)$, $\mathfrak{B}$ die Menge aller $x\in X$, für die $\lim\limits_{\alpha\downarrow 0}\frac{1}{\alpha}(A^\alpha x - x)$ existiert und $[\log(A)]x = \lim\limits_{\alpha\downarrow 0}\frac{1}{\alpha}(A^\alpha x - x)$ $(x\in\mathfrak{B})$.

Satz 1. *Es sei A ein Operator vom Typ (M), dann gilt*

$$\mathfrak{M}(0;0)\subseteqq\mathfrak{B} \tag{2. 3}$$

und

$$[\log(A)]x = \int_0^\infty (1+\eta)^{-1}(A-I)(A+\eta I)^{-1}x\,d\eta \qquad (x\in\mathfrak{M}(0;0)). \tag{2. 4}$$

Beweis. Es wird zunächst gezeigt, daß das Integral (2. 2) für alle $x\in\mathfrak{M}(0;0)$ konvergiert, um anschließend zu beweisen, daß $\lim\limits_{\alpha\downarrow 0}\frac{1}{\alpha}(A^\alpha x - x)$ auf $\mathfrak{M}(0;0)$ existiert und mit (2. 4) übereinstimmt.

Es sei $x \in \mathfrak{D}(A^{\alpha'}) \cap \mathfrak{R}(A^{\beta'})$ $(0 < \alpha', \beta' \leqq 1)$. Für das Integral (2. 2) erhält man die folgende Abschätzung

$$\left\| \int_0^\infty (1+\eta)^{-1} (A-I)(A+\eta I)^{-1} x \, d\eta \right\| \leqq (1+2M) \ln 2 \cdot \|x\| +$$

$$+ \int_0^1 \|(A+\eta I)^{-1} x\| \frac{d\eta}{1+\eta} + \int_1^\infty \|A(A+\eta I)^{-1} x\| \frac{d\eta}{1+\eta}.$$

Da $x \in \mathfrak{R}(A^{\beta'})$ ist, existiert ein $y \in \mathfrak{D}(A^{\beta'})$ mit $x = A^{\beta'} y$. Daraus folgt auf Grund von (1. 5) die Ungleichung

$$\|(A+\eta I)^{-1} x\| = \|(A+\eta I)^{-1} A^{\beta'} y\| \leqq K(\beta') \eta^{\beta'-1} \|y\|$$

und somit

$$\int_0^1 (1+\eta)^{-1} \|(A+\eta I)^{-1} x\| \, d\eta \leqq K(\beta') \|y\| \int_0^1 \frac{\eta^{\beta'-1}}{1+\eta} \, d\eta.$$

Die Konvergenz des Integrales $\int_1^\infty (1+\eta)^{-1} \|A(A+\eta I)^{-1} x\| d\eta$ erhält man mittels (1. 5) aus der Ungleichung

$$\|A(A+\eta I)^{-1} x\| = \|A^{1-\alpha'} (A+\eta I)^{-1} A^{\alpha'} x\| \leqq K(1-\alpha') \eta^{-\alpha'} \|A^{\alpha'} x\|.$$

Für $x \in \mathfrak{D}(A^{\alpha'}) \cap \mathfrak{R}(A^{\beta'})$ ergibt sich auf Grund von (1. 4) und

$$\frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty \eta^{\alpha-1} (1+\eta)^{-1} \, d\eta = 1 \qquad (0 < \alpha < 1)$$

die Beziehung

$$\frac{1}{\alpha} (A^\alpha x - x) - \int_0^\infty \frac{(A-I)}{1+\eta} (A+\eta I)^{-1} x \, d\eta =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\eta^\alpha \dfrac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} - 1}{1+\eta} (A-I)(A+\eta I)^{-1} x \, d\eta \qquad (0 < \alpha < \alpha').$$

Wegen $x = A^{\beta'} y \, (y \in \mathfrak{D}(A^{\beta'}))$ und $x \in \mathfrak{D}(A^{\alpha'})$ erhält man mittels (1. 5) für $0 < \delta \leqq 1$ die Abschätzung

$$\left\| \int_0^\delta \frac{\eta^\alpha \dfrac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} - 1}{1+\eta} (A+\eta I)^{-1} A^{\beta'} y \, d\eta \right\| \leqq 2K(\beta') \|y\| \int_0^\delta \eta^{\beta'-1} \, d\eta$$

und für $1 < R < \infty$

$$\left\| \int_R^\infty \frac{\eta^\alpha \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} - 1}{1+\eta} A(A+\eta I)^{-1} x \, d\eta \right\| \leqq$$

$$\leqq \|A^{\alpha'} x\| \cdot K(1-\alpha') \left\{ \int_R^\infty \eta^{\alpha-\alpha'-1} \, d\eta + \int_R^\infty \eta^{-\alpha'-1} \, d\eta \right\}.$$

Zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ existieren folglich ein $\delta_0 > 0$ und ein $R_0 < \infty$, so daß

$$\left\| \left(\int_0^{\delta_0} + \int_{R_0}^\infty \right) \frac{\eta^\alpha \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} - 1}{1+\eta} (A-I)(A+\eta I)^{-1} x \, d\eta \right\| \leqq \frac{\varepsilon}{2} \tag{2. 5}$$

gilt. Auf Grund von

$$\left\| \int_{\delta_0}^{R_0} \frac{\eta^\alpha \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} - 1}{1+\eta} (A-I)(A+\eta I)^{-1} x \, d\eta \right\| \leqq$$

$$\leqq \sup_{\delta_0 \leqq \eta \leqq R_0} \left| \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} \eta^\alpha - 1 \right| \cdot \int_{\delta_0}^{R_0} \|(A-I)(A+\eta I)^{-1} x\| \frac{d\eta}{1+\eta} \leqq \frac{\varepsilon}{2}$$

für $0 < \alpha \leqq \alpha_0(\varepsilon) < \alpha'$ und (2. 5) ergibt sich die Aussage des Satzes.

Lemma 2. *Die Operatoren* $Z_n = A^{1/n} n(nI+A)^{-1}$ $(n=2, 3, \ldots)$ *sind gleichmäßig durch* $3M(M+1)$ *beschränkt, und es gilt* $\lim_{n\to\infty} Z_n x = x$. *Die Operatoren* Z_n *und* $[\log(A)]$ *sind auf* $\mathfrak{B}$ *vertauschbar.*

Beweis. Für ein Element $x \in X$ gilt $n(A+nI)^{-1} x \in \mathfrak{D}(A)$, so daß sich nach Definition

$$Z_n x = A^{1/n} n(A+nI)^{-1} x = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \int_0^\infty \eta^{\frac{1}{n}-1} R(-\eta; A) A R(-n; A) x \, d\eta$$

und somit

$$\|A^{1/n} n(A+nI)^{-1} x\| \leqq \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} M(1+M) \left\{ \int_0^1 \frac{\eta^{\frac{1}{n}-1}}{n} \, d\eta + \int_1^\infty \eta^{\frac{1}{n}-2} \, d\eta \right\} \|x\| \leqq$$

$$\leqq 3M(1+M) \|x\|$$

ergibt.

Es sei nun $x \in \mathfrak{D}(A)$, dann gilt auf Grund der Vertauschbarkeit von $A^{1/n}$ und $n(A+nI)^{-1}$ (vgl. (1.6)) die Ungleichung

$$\|Z_n x - x\| \leq \|n(A+nI)^{-1}A^{1/n}x - n(A+nI)^{-1}x\| + \|n(A+nI)^{-1}x - x\| \leq$$
$$\leq M\|A^{1/n}x - x\| + \|n(A+nI)^{-1}x - x\|.$$

Wegen der Beziehungen $\lim_{n\to\infty} A^{1/n}x = x$ $(x \in \mathfrak{D}(0))$ (vgl. (1.7)) und $\lim_{n\to\infty} n(A+nI)^{-1}x = x$ $(x \in X)$ erhält man $\lim_{n\to\infty} A^{1/n}n(A+nI)^{-1}x = x$ für $x \in \mathfrak{D}(A)$. Die Behauptung folgt nun aus $\overline{\mathfrak{D}(A)} = X$ und der gleichmäßigen Beschränktheit der Folge (Z_n).

Es sei $x \in \mathfrak{B}$. Entsprechend (1.6) gilt für hinreichend kleines $h > 0$

$$\|[\log(A)]Z_m x - Z_m[\log(A)]x\| \leq \left\|[\log(A)]Z_m x - \frac{1}{h}(A^h - I)Z_m x\right\| +$$
$$+ \|Z_m\| \left\|\frac{1}{h}(A^h - I)x - [\log(A)]x\right\|$$

und folglich wegen $Z_m x \in \mathfrak{B}$ $(m = 1, 2, \dots)$ die Behauptung.

Satz 2. *Der Operator* $[\log(A)]$ *ist abschließbar.*

Beweis. Die Abschließbarkeit von $[\log(A)]$ ist bewiesen, wenn wir zeigen, daß aus $\{x_n\} \subset \mathfrak{B}$, $\lim x_n = 0$ und $\lim [\log(A)]x_n = y$ die Aussage $y = 0$ folgt (vgl. [1]). Für eine Folge $\{x_n\}$ mit den genannten Eigenschaften gilt dann einerseits wegen $\|A^{\frac{1}{2}}(A+I)^{-1}\| \leq K(\frac{1}{2})$ (vgl. (1.5))

$$\lim A^{\frac{1}{2}}(A+I)^{-1}[\log(A)]x_n = A^{\frac{1}{2}}(A+I)^{-1}y.$$

Andererseits erhält man wegen

$$A^{\frac{1}{2}}(A+I)^{-1}[\log(A)]x_n = [\log(A)]A^{\frac{1}{2}}(A+I)^{-1}x_n$$

die Beziehung

$$\|A^{\frac{1}{2}}(A+I)^{-1}[\log(A)]x_n\| \leq$$
$$\leq (1+M)K(\tfrac{1}{2})\left\{\int_0^\infty \frac{d\eta}{(1+\eta)\sqrt{\eta}} + \int_0^1 \frac{d\eta}{1+\eta} + \int_1^\infty \frac{d\eta}{\eta(1+\eta)}\right\}\|x_n\| \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Folglich ist $A^{\frac{1}{2}}(A+I)^{-1}y = 0$. Wegen (1.8) ergibt sich $y = 0$, was zu zeigen war.

Definition 2. Die Abschließung von $[\log(A)]$ heißt der Logarithmus des Operators A und wird mit $\log(A)$ bezeichnet.

Satz 3. *Der Logarithmus* $\log(A)$ *ist auf einer in X dichten Teilmenge* $\mathfrak{D}(\log(A))$ *definiert. Die Menge* $\mathfrak{M}(0; 0)$ *ist ein Kern von* $\log(A)$, *d.h., zu jedem* $x \in \mathfrak{D}(\log(A))$ *existiert eine Folge* $\{x_n\} \subset \mathfrak{M}(0; 0)$ *mit* $\lim x_n = x$ *und* $\lim \log(A)x_n = \log(A)x$.

Beweis. Die Beziehung $\overline{\mathfrak{D}(\log(A))}=X$ folgt unmittelbar aus $\mathfrak{M}(0;0)\subseteqq \subseteqq\mathfrak{B}\subseteqq\mathfrak{D}(\log(A))$ und Lemma 2.

Um zu beweisen, daß $\mathfrak{M}(0\,;0)$ ein Kern von $\log(A)$ ist, zeigen wir zunächst $Z_n\log(A)x=\log(A)Z_nx$ für $x\in\mathfrak{D}(\log(A))$ und $n=1,2,\ldots$, wobei $Z_n=A^{1/n}n(nI+A)^{-1}$.

Auf $\mathfrak{B}$ sind entsprechend Lemma 2 die Operatoren $\log(A)$ und Z_n vertauschbar. Es sei $y\in\mathfrak{D}(\log(A))$; nach Definition existiert eine Folge $\{y_m\}\subset\mathfrak{B}$ mit $\lim y_m=y$ und $\lim\log(A)y_m=\log(A)y$. Daraus folgt

$$\lim\log(A)Z_ny_m=\lim Z_n\log(A)y_m=Z_n\log(A)y.$$

Aus der Abgeschlossenheit von $\log(A)$ ergibt sich dann $Z_ny\in\mathfrak{D}(\log(A))$ und $Z_n\log(A)y=\log(A)Z_ny$.

Es seien nun $x\in\mathfrak{D}(\log(A))$ und $x_n=Z_nx$ ($Z_nx\in\mathfrak{M}(0;0)$ für alle $n=1,2,\ldots$). Dann gilt $\lim x_n=x$ (vgl. Lemma 2) und $\lim\log(A)x_n=\lim Z_n\log(A)x=\log(A)x$.

3. Lemma 3. *Es sei* $A_s=(A+sI)(sA+I)^{-1}$ $(s>0)$. *Dann gilt:*

a) *die Operatoren* A_s *sind beschränkte und beschränkt invertierbare Operatoren vom Typ* (M') *mit* $M'=1+2M$,

b) $\lim\limits_{s\downarrow 0}(A_s)^\alpha x=A^\alpha x$ $(x\in\mathfrak{D}(\alpha);\ \alpha\geqq 0)$,

c) $\lim\limits_{s\downarrow 0}\log(A_s)x=\log(A)x$ $(x\in\mathfrak{M}(0;0))$.

Beweis. a) Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus der Definition von A_s und der Beziehung

$$\|(A_s+\eta I)^{-1}\|=\frac{1}{1+\eta s}\left\|(sA+I)\left(A+\frac{s+\eta}{1+\eta s}\right)^{-1}\right\|\leqq$$

$$\leqq(M+1)\frac{s}{1+\eta s}+\frac{M}{s+\eta}\leqq\frac{2M+1}{\eta}\qquad(\eta>0).$$

b) Es sei $x\in\mathfrak{D}(\alpha)$ $(0\leqq\alpha<1)$. Dann gilt für $x\in\mathfrak{D}(\alpha')$ $\quad(\alpha'>\alpha)$

$$\|(A_s)^\alpha x-A^\alpha x\|=\left\|\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int\limits_0^\infty\left(A_s(A_s+\eta I)^{-1}-A(A+\eta I)^{-1}\right)\eta^{\alpha-1}x\,d\eta\right\|\leqq$$

$$\leqq M^2s^\alpha\|x\|+(1+M)^2\ln(1+s)\|x\|+(1+M)s^{\alpha'-\alpha}\frac{K(1-\alpha')}{\sin\pi(\alpha'-\alpha)}\|A^{\alpha'}x\|\to 0\qquad(s\to 0)$$

(vgl. (1. 5)).

Für $\alpha=1$ ergibt sich die Behauptung aus der Ungleichung

$$\|A_sx-Ax\|=\left\|(I-A^2)\left(A+\frac{1}{s}I\right)^{-1}x\right\|\leqq \tag{3. 1}$$

$$\leqq Ms\|x\|+K(1-\varepsilon)s^\varepsilon\|A^{1+\varepsilon}x\|\qquad(x\in\mathfrak{D}(A^{1+\varepsilon}),\ \varepsilon>0).$$

Auf Grund der Beziehung

$$\lim_{s\downarrow 0}(A_s)^{n+\alpha}x=\lim_{s\downarrow 0}(A_s)^n(A_s)^\alpha x=A^{n+\alpha}x\qquad (x\in\mathfrak{D}(n+\alpha))$$

$(0\leqq\alpha\leqq 1;\ n=1,2,\ldots)$, die sich unmittelbar aus (3. 1) ergibt, fogt dann die Aussage für $\alpha>1$.

c) Es sei $x\in\mathfrak{D}(A^\alpha)\cap\mathfrak{R}(A^\beta)$ $(0<\alpha,\beta\leqq 1)$. Nach Voraussetzung existiert also ein $y\in\mathfrak{D}(A^\beta)$ mit $x=A^\beta y$. Mit Hilfe von (1. 5) und (2. 4) ergibt sich

$$\|\log(A_s)x-\log(A)x\|=s\left\|\int_0^\infty\frac{A^2-I}{1+\eta s}\left(A+\frac{s+\eta}{1+\eta s}\right)^{-1}(A+\eta I)^{-1}x\,d\eta\right\|\leqq$$

$$\leqq\frac{(M+1)\pi K(1-\alpha)}{\sin\pi\alpha}\|A^\alpha x\|s^\alpha+\frac{M\pi K(\beta)}{\sin\pi\beta}\|A^\beta y\|s^\beta\to 0\qquad(s\to 0).$$

Satz 4. *Es sei A ein Operator vom Typ (M). Dann gilt*

a) $\displaystyle\lim_{\beta\downarrow\alpha}\frac{1}{\beta-\alpha}(A^\beta-A^\alpha)x=\log(A)A^\alpha x\qquad(x\in\mathfrak{D}(\alpha);\ \alpha\geqq 0),$

b) $\log(A)A^\alpha x=A^\alpha\log(A)x\qquad(x\in\mathfrak{M}(\alpha;0);\ \alpha\geqq 0),$

c) $\displaystyle\lim_{s\downarrow 0}e^{\alpha\log(A_s)}x=A^\alpha x\qquad(x\in\mathfrak{D}(\alpha);\ \alpha\geqq 0).$

Beweis. a) Es sei $x\in\mathfrak{D}(A^{\alpha'})$ $(\alpha'>\alpha)$. Auf Grund des Potenzgesetzes (1. 1) ist

$$\lim_{\beta\downarrow\alpha}\frac{1}{\beta-\alpha}(A^\beta x-A^\alpha x)=\lim_{\beta\downarrow\alpha}\frac{1}{\beta-\alpha}(A^{\beta-\alpha}-I)A^\alpha x=\log(A)A^\alpha x.$$

b) Es sei $x\in\mathfrak{M}(\alpha;0)$ für $0\leqq\alpha\leqq 1$. Dann gilt

$$A^\alpha\frac{1}{h}(A^h-I)x=\frac{1}{h}(A^h-I)A^\alpha x\to\log(A)A^\alpha x\qquad(h\to 0).$$

Aus der Abgeschlossenheit von A^α ergibt sich dann $\log(A)x\in\mathfrak{D}(A^\alpha)$ und $A^\alpha\log(A)x=$ $=\log(A)A^\alpha x$.

Für $\alpha>1$ erhält man die Aussage unmittelbar auf Grund der Definition von A^α und der vorangegangenen Überlegung.

c) Die Behauptung ergibt sich aus der Multiplikativität des Riesz—Dunfordschen Funktionalkalküls (vgl. [5] und Lemma 3b).

Satz 5. *Es sei* $\log(A)$ *der Logarithmus eines Operators A vom Typ (M). Dann gilt:*

a) $\log(cA)=\log(A)+(\log c)I$ $(c>0)$,[4] *und* b) $\log(A^\sigma)=\sigma\log(A)$ $(0\leqq\sigma\leqq 1)$.

[4]) Eine vollständige Analogie zu der Beziehung $\log ab=\log a+\log b$ ist für zwei Operatoren A und B vom Typ (M) nicht zu erwarten, da der Operator AB i.a. — selbst unter der Voraussetzung der Vertauschbarkeit von A und B — nicht vom Typ (M) ist.

Beweis a) Der Operator cA ist für $c>0$ vom Typ (M) und es gilt $c^\alpha A^\alpha=(cA)^\alpha$. Für $x\in\mathfrak{M}(0;0)$ ist

$$\log(cA)x=\lim_{\alpha\downarrow 0}\frac{(cA)^\alpha-I}{\alpha}x=\lim_{\alpha\downarrow 0}\frac{c^\alpha-1}{\alpha}A^\alpha x+\lim_{\alpha\downarrow 0}\frac{A^\alpha-I}{\alpha}x=$$

$$=(\log c)x+\log(A)x.$$

Folglich gilt auf Grund der Abgeschlossenheit von $\log(cA)$ und $\overline{\mathfrak{M}(0;0)}=X$ die Beziehung $\log(cA)x=(\log c)x+\log(A)x$ $\big(x\in\mathfrak{D}(\log(A))\big)$.
Ebenso ergibt sich $\log(cA)x=(\log c)x+\log(A)x$ für $x\in\mathfrak{D}\big(\log(cA)\big)$.

b) Für $x\in\mathfrak{M}(0;0)$ ist wegen $(A^\alpha)^\beta=A^{\alpha\beta}$ $(0\leqq\alpha\leqq 1;\ \beta\geqq 0)$ (vgl. (1. 2))

$$\log(A^\sigma)x=\sigma\lim_{\sigma\alpha\downarrow 0}\frac{(A^{\sigma\alpha}x-x)}{\sigma\alpha}=\sigma\log(A)x.$$

Wegen der Abgeschlossenheit von $\log(A^\sigma)$ und $\overline{\mathfrak{M}(0;0)}=X$ — denn A^σ ist ebenfalls vom Typ (M) — ergibt sich dann $\log(A^\sigma)x=\sigma\log(A)x$ für $x\in\mathfrak{D}\big(\log(A)\big)$. Aus einer entsprechenden Überlegung für $x\in\mathfrak{D}\big(\log(A^\sigma)\big)$ folgt dann insgesamt die Behauptung.

Satz 6. *Für $\xi>0$ und $x\in\mathfrak{D}(0)$ ist* $\dfrac{d}{d\xi}\log(A+\xi I)x=R(-\xi;A)x.$

Beweis. Mit Hilfe der Abschätzung

$$\|(A+\xi I)^\alpha-A^\sigma x\|\leqq\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\left\{\frac{2}{\alpha}+\frac{1}{1-\alpha}\right\}M^2\xi^\alpha\|x\|\qquad\big(x\in\mathfrak{D}(A);\ 0<\alpha<1\big)$$

(vgl. [9]) ergibt sich unmittelbar die Beziehung $\mathfrak{D}(A^\sigma)=\mathfrak{D}\big((A+\xi I)^\alpha\big)$ und somit $\mathfrak{D}(0)=\bigcup_{\alpha>0}\mathfrak{D}\big((A+\xi I)^\alpha\big)$ für alle $\xi>0$. Wegen $\mathfrak{R}(A+\xi I)=X$ ist $\mathfrak{R}(0)=X$, und es gilt

$$\log(A+\xi I)x=\int_0^\infty\frac{A+(\xi-1)I}{1+\eta}\big(A+(\xi+\eta)I\big)^{-1}x\,d\eta$$

für $x\in\mathfrak{D}(0)$. Durch Differentiation erhält man dann die Behauptung.

4. Lemma 4. *Es sei A ein beschränkter und beschränkt invertierbarer Operator vom Typ (M). Dann gilt*

a) $\sigma\big(\log(A)\big)\subset\{z:|\operatorname{Im} z|\leqq\pi\}$,

b) $$\big(\log(A)-zI\big)^{-1}=\int_0^\infty\frac{R(-\eta;A)}{(\log\eta-z)^2+\pi^2}\,d\eta\qquad(|\operatorname{Im} z|>\pi).$$

Beweis. Die Aussage a) ergibt sich aus dem Spektralabbildungssatz [5], da $\log z$ (vgl. [3])) holomorph auf $\sigma(A)$ ist.

b) Entsprechend dem Riesz—Dunfordschen Funktionalkalkül ist

$$(\log(A) - zI)^{-1} = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C} (\log\zeta - z)^{-1} R(\zeta; A)\, d\zeta.$$

Wählt man den Integrationsweg wie im Beweis zum Lemma 1, so erhält man

$$(\log(A) - zI)^{-1} = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^\infty (\log\eta + i\pi - z)^{-1} R(-\eta; A)\, d\eta +$$

$$+\frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^\infty (\log\eta - i\pi - z)^{-1} R(-\eta; A)\, d\eta = \int\limits_0^\infty \frac{R(-\eta; A)}{(\log\eta - z)^2 + \pi^2}\, d\eta.$$

Satz 7. *Es sei A ein Operator vom Typ (M); dann gilt*

(4. 1) a) $\sigma(\log(A)) \subset \{z : |\mathrm{Im}\, z| \leqq \pi\}$,

(4. 2) b) $$(\log(A) - zI)^{-1} = \int\limits_0^\infty \frac{R(-\eta; A)}{(\log\eta - z)^2 + \pi^2}\, d\eta \qquad (|\mathrm{Im}\, z| > \pi).$$

Beweis. I. Wir überlegen uns zunächst, daß der lineare Operator

$$S(z) = \int\limits_0^\infty \frac{R(-\eta; A)}{(\log\eta - z)^2 + \pi^2}\, d\eta \qquad (|\mathrm{Im}\, z| > \pi)$$

beschränkt ist.

Es sei $z = \alpha + i\beta$ $(|\beta| > \pi)$; dann gilt

(4. 3) $$\left(\int\limits_0^\varepsilon + \int\limits_R^\infty\right)\left(\frac{\|R(-\eta; A)\|}{|(\log\eta - z)^2 + \pi^2|}\, d\eta\right) \leqq \left(\int\limits_0^\varepsilon + \int\limits_R^\infty\right) \frac{M\, d\eta}{\eta\{(\log\eta - \alpha)^2 - \beta^2 + \pi^2\}} \to 0$$

$(\varepsilon \to 0,\ R \to \infty)$, womit die Aussage bewiesen ist.

II. Es sei $A_s = (A + sI)(sA + I)^{-1}$ $(s > 0)$. Wir zeigen, daß $R(z; \log(A_s))$ für $s \to 0$ in der gleichmäßigen Operatorentopologie gegen $S(z)$ konvergiert.

Diese Aussage ergibt sich wie folgt. Es ist

$$\|S(z)-R(z;\log(A_s))\| =$$

$$= \left\| \int_0^\infty \frac{s}{\{(\log\eta - z)^2+\pi^2\}(\eta s+1)} (I-A^2)(A+\eta I)^{-1}\left(A+\frac{\eta+s}{\eta s+1}I\right)^{-1} d\eta \right\|.$$

Für beliebige Werte ε, R mit $0<\varepsilon<R<\infty$ gilt

$$\int_\varepsilon^R \left\| \frac{s(I-A^2)(A+\eta I)^{-1}\left(A+\dfrac{\eta+s}{\eta s+1}I\right)^{-1}}{\{(\log\eta - z)^2+\pi^2\}(\eta s+1)} d\eta \right\| \leqq$$

$$\leqq \int_\varepsilon^R \frac{s}{|(\log\eta - z)^2+\pi^2|}\left(\frac{M^2}{\eta^2}+(M+1)^2\right) d\eta \to 0 \qquad (s\to 0).$$

Zusammen mit (4. 3) erhält man damit die Behauptung.

III. Wir beweisen nun, daß $S(z)$ die Linksinverse von $(\log(A)-zI)$ ist.

Für $x\in\mathfrak{M}(0;0)$ gilt

$$\|S(z)(\log(A)-zI)x-x\| \leqq \|S(z)\|\,\|\log(A)x-\log(A_s)x\| +$$
$$+\|S(z)-R(z;\log(A_s))\|\,\|\log(A_s)x-zx\| \to 0$$

für $s\to 0$ auf Grund von Lemma 3c) und der in II bewiesenen Aussage. Aus der Stetigkeit von $S(z)$ und der Tatsache, daß $\mathfrak{M}(0;0)$ ein Kern von $\log(A)$ ist, folgt dann

$$S(z)(\log(A)-zI)x = x \quad (x\in\mathfrak{D}(\log(A))).$$

IV. Es bleibt zu zeigen, daß der Operator $S(z)$ auch die Rechtsinverse von $(\log(A)-zI)$ ist.

Der Operator $S(z)$ stellt sich nach Definition als der gleichmäßige Limes von Operatoren der Form $S_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k R(-\eta_k; A)$ (α_k — komplexe Zahlen; $\eta_k>0$; $k=1,2,\dots,n$) dar. Wegen $S_n\mathfrak{M}(0;0)\subset\mathfrak{M}(0;0)$ gilt $\log(A)S_n x = S_n\log(A)x$ für $x\in\mathfrak{M}(0;0)$. Die Folge $\log(A)S_n x$ $(x\in\mathfrak{M}(0;0))$ konvergiert für $n\to\infty$ also gegen $S(z)\log(A)x$. Auf Grund der Abgeschlossenheit von $\log(A)$ folgt dann $S(z)x\in\mathfrak{D}(\log(A))$ und $\log(A)S(z)x=S(z)\log(A)x$, d.h., auf $\mathfrak{M}(0;0)$ gilt entsprechend III:

$$(\log(A)-zI)S(z) = S(z)(\log(A)-zI) = I.$$

Aus der Abgeschlossenheit von $\log(A)$ und $\overline{\mathfrak{M}(0;0)}=X$ folgt dann $(\log(A)-zI)\cdot S(z)=I$, es ist also $S(z) = (\log(A)-zI)^{-1}$, was zu zeigen war.

5. Ein linearer abgeschlossener Operator A in einem Hilbertraum X heißt maximal accretiv, wenn $\mathrm{Re}\,(Ax, x) \geqq 0$ $(x \in \mathfrak{D}(A))$ und $(A+I)\mathfrak{D}(A) = X$ gilt (vgl. [14]). Die abgeschlossenen maximal accretiven Operatoren sind folglich genau die Operatoren vom Typ (M) mit $M = 1$.

Bekanntlich (vgl. [4], [8]) besitzt die Resolvente $R(z; A)$ $(\mathrm{Re}\, z < 0)$ eines abgeschlossenen maximal accretiven Operators eine verallgemeinerte Spektraldarstellung der Form

$$R(z; A)x = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{F(dt)x}{t-z} \qquad (\mathrm{Re}\, z < 0;\ x \in X), \tag{5.1}$$

wobei $F(i\tau)$ $(-\infty < \tau < \infty)$ eine verallgemeinerte Spektralschar ist, d.h. eine linksstetige, nichtabnehmende Schar von selbstadjungierten Operatoren, mit $F(i\tau) \to O$ für $\tau \to -\infty$ und $F(i\tau) \to I$ für $\tau \to +\infty$. Mit Hilfe von (5. 1), (2. 4) und (4. 2) erhält man den

Satz 8. *Es sei A ein abgeschlossener maximal accretiver Operator mit* $0 \notin \sigma_p(A)$. *Dann gilt*

$$\log (A)x = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \log t F(dt)x \qquad (x \in \mathfrak{M}(0; 0))$$

und

$$(\log (A) - zI)^{-1} x = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{F(dt)x}{\log t - z} \qquad (x \in X;\ |\mathrm{Im}\, z| > \pi).$$ [5])

Abschließend wollen wir zeigen, daß für einen maximal accretiven Operator A in einem Hilbertraum X mit $0 \notin \sigma_p(A)$, d.h., $\overline{\mathfrak{R}(A)} = X$ [7], der Logarithmus von A als ein Spezialfall des von Sz.-Nagy und Foiaş [13] entwickelten Funktionalkalküls für Kontraktionen definiert werden kann und mit dem oben definierten Operator $\log(A)$ überstimmt. Wir beziehen uns dabei weitgehend auf die Bezeichnungsweise von Sz.-Nagy und Foiaş [13] sowie auf die dort formulierten Aussagen.

Bekanntlich besteht zwischen einer Kontraktion T mit $\overline{\mathfrak{R}(T-I)} = X$ und einem abgeschlossenen maximal accretiven Operator A mittels der Cayleytransformation

$$T = (A-I)(A+I)^{-1} \quad \text{und} \quad A = (I+T)(I+T)^{-1} \tag{5.2}$$

ein eineindeutiger Zusammenhang. Um für A mit Hilfe eines Funktionalkalküls für Kontraktionen einen Logarithmus definieren zu können, geht man in der Weise vor, daß man versucht, der Kontraktion T einen Operator $\zeta(T)$ zuzuordnen, wobei $\zeta(z) = \log \varphi(z)$ mit $\varphi(z) = (1+z)(1-z)^{-1}$ ist.

[5]) Zur Definition von $\log t$ vgl. [3]).

Für einen abgeschlossenen maximal accretiven Operator mit der Eigenschaft $0 \notin \sigma_p(A)$ gilt auf Grund von (5. 2) $\{-1, 1\} \cap \sigma_p(T) = \emptyset$. Folglich gehören die Werte -1 und $+1$ nicht zum Punktspektrum der minimalen unitären Dilatation U_T von T [11], d.h., das Spektralmaß E_T (vgl. [12]) verschwindet auf $\{-1, 1\}$. Wir betrachten nun die Funktion $\zeta(z) = \log \frac{1+z}{1-z} = \frac{u(z)}{v(z)}$ mit $u(z) = (1+z)(1-z) \cdot \log \frac{1+z}{1-z}$ und $v(z) = (1+z)(1-z)$. Die Funktion $u(z)$ ist beschränkt und holomorph in $D = \{z;\ |z| < 1\}$ und wegen $E_T(\{-1, 1\}) = 0$ gehört $u(z)$ zur Klasse H_T im Sinne von Sz.-Nagy und Foiaş [13]. Die Funktion $v(z)$ gehört zu der an gleicher Stelle definierten Funktionenklasse E_T der in $D = \{z;\ |z| < 1\}$ beschränkten äußeren Funktionen, für die $E_T(v^{-1}(0)) = 0$ gilt. Die Verfasser beweisen in Theorem 6 [13], daß dann der Funktion $\zeta(z) = u(z)v(z)^{-1} = \log \frac{1+z}{1-z}$ ein linearer abgeschlossener Operator $\zeta(T)$ mit in X dichtem Definitionsbereich $\mathfrak{D}(\zeta(T))$ zugeordnet werden kann.

Satz 9. *Es sei A ein abgeschlossener maximal accretiver Operator mit* $0 \notin \sigma_p(A)$. *Dann gilt* $\log(A) = \zeta(T)$.

Beweis. Es sei $0 < r < 1$. Dann sind die Operatoren $A_r = (I + rT)(I - rT)^{-1}$ beschränkt und beschränkt invertierbar. Entsprechend (2. 1) gilt also

$$\log(A_r) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C \log z R(z; A_r)\, dz.$$

Auf Grund von Theorem 6 (VII) [13] (vgl. auch [11]) ergibt sich, daß der Operator $\zeta_r(T)$, der der Funktion $\zeta_r(z) = \zeta(rz) = \log \frac{1+rz}{1-rz}$ entsprechend dem Funktionalkalkül von Sz.-Nagy und Foiaş zugeordnet ist, in der Form $\zeta_r(T) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C \log z \cdot R(z; A_r) dz$ darstellbar ist. Daraus ergibt sich $\zeta_r(T) = \log(A_r)$ $(0 < r < 1)$.

In Theorem 8 der genannten Arbeit [13] beweisen die Verfasser, daß alle $x \in X$, die der Bedingung $\sup_{0<r<1} \|\zeta_r(T)x\| < \infty$ genügen, zum Definitionsbereich $\mathfrak{D}(\zeta(T))$ gehören. Für diese $x \in \mathfrak{D}(\zeta(T))$ und $y \in X$ ist ferner $\lim_{r \uparrow 1} (\log(A_r)x, y) = \lim_{r \uparrow 1} (\zeta_r(T)x, y) = (\zeta(T)x, y)$.

Mit Hilfe einer einfachen Rechnung erhält man für $s = \frac{1-r}{1+r}$ $(0 < r < 1)$ die Beziehung $A_r = (A + sI)(sA + I)^{-1}$ und auf Grund von Lemma 3c)

$$\lim_{r \uparrow 1} \log(A_r)x = \log(A)x \qquad (x \in \mathfrak{M}(0; 0)).$$

Folglich gilt für $x \in \mathfrak{M}(0; 0)$

$$\sup_{0<r<1} \|\zeta_r(T)x\| = \sup_{0<r<1} \|\log(A_r)x\| < \infty.$$

Die Operatoren $\zeta(T)$ und $\log(A)$ sind also auf $\mathfrak{M}(0; 0)$ identisch. Auf Grund der Abgeschlossenheit der Operatoren $\zeta(T)$ und $\log(A)$ ergibt sich, — da $\mathfrak{K}(0; 0)$ ein Kern von $\log(A)$ ist — die Behauptung $\zeta(T) \supset \log(A)$. Aus der in Abschnitt 4 angegebenen Integraldarstellung für $(\log(A) - zI)^{-1}$ ($|\mathrm{Im}\, z| > \pi$) erhält man mit Theorem 6 [13] die Behauptung.

Literaturverzeichnis

[1] N. I. Achieser und I. M. Glasmann, *Theorie der linearen Operatoren im Hilbertraum* (Berlin, 1960).

[2] A. V. Balakrishnan, Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them, *Pac. J. Math.*, **10** (1960), 419—437.

[3] H. Behnke und F. Sommer, *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen* (Berlin, 1955).

[4] C. L. Dolph, Positive real resolvents and linear positive Hilbert systems, *Ann. Acad. Sci. Fennicae* (ser. A.), **336/9** (1963), 3—39.

[5] N. Dunford and J. Schwartz, *Linear operators*. I (New York, 1958).

[6] G. L. Krabbe, On the logarithm of a uniform bounded operator, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **81** (1956), 155—166.

[7] H. Langer, Ein Zerspaltungssatz für Operatoren im Hilbertraum, *Acta Math. Hung.*, **12** (1961), 441—445.

[8] H. Langer und V. Nollau, Einige Bemerkungen über dissipative Operatoren im Hilbertraum, *Wiss. Zeitschr. TU Dresden*, **15** (1966), 669—673.

[9] W. I. Mazajeff und J. A. Palant, Über die Potenzen eines beschränkten dissipativen Operators, *Ukr. Matem. Žurnal*, **14** (1962), 329—337. (russ.)

[10] V. Nollau, Über Potenzen von linearen Operatoren in Banachschen Räumen, *Acta Sci. Math.*, **28** (1967), 107—121.

[11] B. Sz.-Nagy et C. Foiaş, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. III, *Acta Sci. Math.*, **19** (1958), 26—45.

[12] B. Sz.-Nagy et C. Foiaş, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. IV, *Acta Sci. Math.*, **21** (1960), 251—259.

[13] B. Sz.-Nagy et C. Foiaş, Sur les contractions de l'espace de Hilbert. VI. Calcul fonctionnel, *Acta Sci. Math.*, **23** (1962), 130—167

[14] B. Sz.-Nagy et C. Foiaş, *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert* (Budapest, 1967).

(Eingegangen am 14. Mai 1968)

On density of transitive algebras

By ERIC A. NORDGREN in Durham (N. H., U.S.A.),
HEYDAR RADJAVI and PETER ROSENTHAL in Toronto (Canada)

1. Introduction

In the following an *algebra* is a weakly closed algebra (containing the identity) of bounded linear operators on a Hilbert space $\mathfrak{H}$. An algebra $\mathcal{A}$ is *transitive* if the only (closed) subspaces of $\mathfrak{H}$ invariant under every operator in $\mathcal{A}$ are $\{0\}$ and $\mathfrak{H}$. If $\mathfrak{H}$ is finite-dimensional, then the only transitive algebra on $\mathfrak{H}$ is $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$, the algebra of all operators on $\mathfrak{H}$, by BURNSIDE's Theorem. It is not known whether or not there are transitive algebras on $\mathfrak{H}$ other than $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ if $\mathfrak{H}$ is infinite-dimensional.

ARVESON [1] has shown that a transitive algebra which contains a maximal abelian von Neumann algebra is $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$. In the same paper ARVESON shows that a transitive algebra which contains the unilateral shift of multiplicity one is $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$. In this note we show that a transitive algebra containing a weighted shift of a certain type (a *Donoghue operator*, defined below) or a finite rank operator, must be $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$. These results will follow from a more general result given below.

2. Sufficient conditions that a transitive algebra be $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$

If A is an operator on $\mathfrak{H}$, let $A^{(n)}$ denote the operator $A\oplus\ldots\oplus A$ (n copies) on $\mathfrak{H}\oplus\ldots\oplus\mathfrak{H}$ (n copies). If $\mathcal{A}$ is an algebra on $\mathfrak{H}$ let $\mathcal{A}^{(n)}=\{A^{(n)}: A\in\mathcal{A}\}$. The following lemma is the main tool developed by ARVESON for studying transitive algebras. The proof of the lemma is implicitly contained in the proof of the main theorem of [1]; (for an alternate exposition of the proof see the proof of Theorem 1 of [5]).

Lemma. *Let $\mathcal{A}$ be a transitive algebra on $\mathfrak{H}$ having the following property: whenever, for any n, $\{T_i\}_{i=1}^n$ is a collection of (not necessarily bounded) operators with a common dense domain $\mathfrak{D}$ such that*

$$\{(x, T_1x, \cdots, T_nx): x\in\mathfrak{D}\}$$

is an invariant subspace of $\mathscr{A}^{(n+1)}$, *then the* T_i *are each scalar multiples of the identity operator. Then* $\mathscr{A}=\mathscr{B}(\mathfrak{H})$.

This lemma can be strengthened as follows.

Theorem. *Let* $\mathscr{A}$ *be a transitive algebra on* $\mathfrak{H}$ *having the following property: whenever, for any* n, $\{T_i\}_{i=1}^n$ *is a collection of (not necessarily bounded) operators with a common dense domain* $\mathfrak{D}$ *such that*

$$\{(x, T_1 x, \cdots, T_n x): x \in \mathfrak{D}\}$$

is an invariant subspace of $\mathscr{A}^{(n+1)}$, *then each* T_i *has an eigenvector (in* $\mathfrak{D}$*). Then* $\mathscr{A}=\mathscr{B}(\mathfrak{H})$.

Proof. Let $\mathfrak{M}=\{(x, T_1x, \dots, T_nx): x\in\mathfrak{D}\}$ be an invariant subspace of $\mathscr{A}^{(n+1)}$. By the above lemma it sufficies to show that each T_i is a multiple of the identity. By hypothesis there is a unit vector x_1 in $\mathfrak{D}$ such that $T_1x_1=\lambda_1x_1$ for some λ_1. Let $\mathfrak{D}_1=\{x\in\mathfrak{D}: T_1x=\lambda_1x\}$. Then $\mathfrak{D}_1$ is an invariant linear manifold of $\mathscr{A}$, since if $x\in\mathfrak{D}_1$ and $A\in\mathscr{A}$, then $T_1Ax=AT_1x$ (by the invariance of $\mathfrak{M}$ under $\mathscr{A}^{(n+1)}$), and hence $T_1Ax=\lambda_1Ax$.

Now let $\mathfrak{M}_1=\{(x, \lambda_1x, T_2x, \dots, T_nx): x\in\mathfrak{D}_1\}$. Then $\mathfrak{M}_1$ is closed and is an invariant subspace of $\mathscr{A}^{(n+1)}$ contained in $\mathfrak{M}$. Also $\mathfrak{D}_1$ is an invariant linear manifold of $\mathscr{A}$ and is therefore dense in $\mathfrak{H}$. Thus $T_2|\mathfrak{D}_1$ has an eigenvector by hypothesis. If λ_2 is the corresponding eigenvalue, let

$$\mathfrak{D}_2 = \{x\in\mathfrak{D}_1: T_2x = \lambda_2x\},$$

and let $\mathfrak{M}_2=\{(x, \lambda_1x, \lambda_2x, T_3x, \dots, T_nx): x\in\mathfrak{D}_2\}$. Then $\mathfrak{M}_2$ is an invariant subspace of $\mathscr{A}^{(n+1)}$.

We can continue this procedure and get a linear manifold $\mathfrak{D}_n\subset\mathfrak{D}$ and complex numbers $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ such that the subspace

$$\mathfrak{M}_n = \{(x, \lambda_1 x, \cdots, \lambda_n x): x\in\mathfrak{D}_n\}$$

is an invariant subspace of $\mathscr{A}^{(n+1)}$ other than $\{0\}$. Then $\mathfrak{D}_n$ is an invariant linear manifold of $\mathscr{A}$ and therefore is dense in $\mathfrak{H}$. Also

$$\mathfrak{D}_n = \{x: (x, \lambda_1 x, \cdots, \lambda_n x)\in\mathfrak{M}\}$$

and is therefore closed. Hence $\mathfrak{D}_n=\mathfrak{H}$ and, since $\mathfrak{D}\supset\mathfrak{D}_n$, $\mathfrak{D}=\mathfrak{H}$ and $T_i=\lambda_iI$ on $\mathfrak{H}$.

Corollary 1. *Let* $\mathscr{A}$ *be a transitive algebra. If there is an operator* A *in* $\mathscr{A}$ *such that:*

(i) *every eigenspace of* A *is one dimensional, and*

(ii) *for each* n, *every non-zero invariant subspace of* $A^{(n)}$ *contains an eigenvector of* $A^{(n)}$,

then $\mathscr{A}=\mathscr{B}(\mathfrak{H})$.

Proof. We use the above theorem. Let

$$\mathfrak{M} = \{(x, T_1 x, \cdots, T_n x) : x \in \mathfrak{D}\}$$

be an invariant subspace of $\mathscr{A}^{(n+1)}$.

By hypothesis there is a vector x_0 in $\mathfrak{D}$ such that $(x_0, T_1 x_0, \ldots, T_n x_0)$ is an eigenvector of $A^{(n+1)}$. Then x_0 is an eigenvector of A; suppose that $Ax_0 = \lambda x_0$. Then for each i, $AT_i x_0 = \lambda T_i x_0$. The fact that the eigenspace of A is one-dimensional implies that for each i there is a λ_i such that $T_i x_0 = \lambda_i x_0$.

Corollary 2. *The only transitive algebra which contains a non-zero finite rank operator is* $\mathscr{B}(\mathfrak{H})$.

Proof. Let $\mathscr{A}$ be a transitive algebra containing a non-zero finite rank operator A. We use the above theorem again.

Let $\mathfrak{M} = \{(x, T_1 x, \ldots, T_n x) : x \in \mathfrak{D}\}$ be an invariant subspace of $\mathscr{A}^{(n+1)}$. We first show that the range of A is contained in $\mathfrak{D}$. For this let $y = Ax$. Since $\mathfrak{D}$ is dense in $\mathfrak{H}$, we can choose a sequence $\{x_k\} \subset \mathfrak{D}$ such that $x_k \to x$. Then Ax_k is in the range of A and in $\mathfrak{D}$ for each k. But the intersection of the range of A and $\mathfrak{D}$ is a finite-dimensional subspace and therefore $Ax = \lim_{k \to \infty} Ax_k$ is in $\mathfrak{D}$.

Now the fact that $AT_i = T_i A$ for each i implies that the range of A is invariant under each T_i. Hence each T_i has a finite-dimensional invariant subspace and therefore has an eigenvector.

3. Algebras containing Donoghue operators

The above has an interesting application to a special case. A *Donoghue operator* is an operator A such that there is an orthonormal basis $\{e_i\}_{i=0}^{\infty}$ for $\mathfrak{H}$ and a square-summable sequence $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ of monotone decreasing positive numbers such that $Ae_0 = 0$ and $Ae_i = a_i e_{i-1}$ for $i > 0$. It is well known (see [3], for example) that the non-trivial invariant subspaces of a Donoghue operator are the subspaces $\mathfrak{M}_i = \bigvee_{j=0}^{i} \{e_j\}$ for non-negative integers i.

Corollary 3. *If $\mathscr{A}$ is a transitive algebra containing a Donoghue operator then* $\mathscr{A} = \mathscr{B}(\mathfrak{H})$.

Proof. Let A be the Donoghue operator in $\mathscr{A}$. To apply Corollary 1 we need only show that A satisfies conditions (i) and (ii) of the hypothesis. It is trivial to see that A satisfies (i); 0 is the only eigenvalue of A, and the corresponding eigenvectors are all multiplies of e_0. The proof that A satisfies (ii) was given in [6]; it involves a computation which we outline below. (A stronger result, that every invariant subspace of $A^{(n)}$ is spanned by the finite-dimensional invariant subspaces that it contains, has been proven in [4].)

To see that A satisfies (ii), fix n and let $S=A^{(n)}$. Let $\mathfrak{M}$ be any invariant subspace of S other than $\{0\}$ and let $(x_1, \dots, x_n)$ be a non-zero vector in $\mathfrak{M}$. Let $x_j=\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_{i,j}e_i$ for $j=1, \dots, n$. If the sequence $\{\alpha_{i,j}\}_{i=0}^{\infty}$ has only finitely many non-zero terms for every j, then the invariant subspace of S generated by $(x_1, \dots, x_n)$ is finite-dimensional and thus contains an eigenvector. We therefore can assume that, for each N, the number

$$\alpha_N = \max\{|\alpha_{i,j}| : i \geqq N;\ j=1, \cdots, n\}$$

is greater than 0. Then for each N there is an $i(N)$ greater than or equal to N and a $j(N)$ such that

$$\alpha_N = |\alpha_{i(N),j(N)}|.$$

For each fixed N

$$\frac{1}{\alpha_{i(N),j(N)}a_{i(N)} \cdots a_1} S^{i(N)}(x_1, \cdots, x_n)$$

is equal to

$$\left(\frac{\alpha_{i(N),1}}{\alpha_{i(N),j(N)}}e_0, \frac{\alpha_{i(N),2}}{\alpha_{i(N),j(N)}}e_0, \cdots, \frac{\alpha_{i(N),n}}{\alpha_{i(N),j(N)}}e_0\right) + (h_{N,1}, \cdots, h_{N,n})$$

where

$$h_{N,j} = \sum_{i=i(N)+1}^{\infty} \frac{\alpha_{i,j}a_i \cdots a_{i-i(N)+1}}{\alpha_{i(N),j(N)}a_{i(N)} \cdots a_1} e_{i-i(N)}.$$

It is easily shown that, for each j, $h_{N,j}$ approaches 0 as N approaches infinity (cf. [3], p. 304). Some number j_0 between 1 and n must occur infinitely often as a value $j(N)$. Also for each fixed j the sequence $\left\{\frac{\alpha_{i(N),j}}{\alpha_{i(N),j(N)}}\right\}_{N=1}^{\infty}$ is contained in the unit disk, and hence has a subsequence converging to a number β_j. Choosing an appropriate subsequence of $\{N\}$ we see that the eigenvector $(\beta_1e_0, \beta_2e_0, \dots, \beta_ne_0)$ of S (with $\beta_{j_0}=1$) lies in $\mathfrak{M}$.

The following corollary seems surprising.

Corollary 4. *If A is a Donoghue operator and B is any operator without point spectrum, then the algebra generated by A and B is $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$.*

Proof. If B has no point spectrum, then A and B have no common invariant subspaces since every invariant subspace of A is finite-dimensional. Hence the algebra generated by A and B satisfies the hypotheses of Corollary 3.

4. Remarks

The results of section 3 remain valid if the definition of a Donoghue operator is extended to mean any unilateral weighted shift operator whose sequence of weights (the sequence $\{a_j\}$) is monotone decreasing in absolute value, non-zero, and p-summable for some $p>0$. The proof of Corollary 3 remains essentially the same for this case.

Another application of the theorem is to transitive algebras containing operators of the form $A\oplus(A+\lambda)$ where A is a Donoghue operator and λ is a non-zero complex number. Property (ii) for such an operator follows from the fact that the spectra of A and $A+\lambda$ are "sufficiently disjoint" to imply that every invariant subspace of $A\oplus(A+\lambda)$ is the direct sum of an invariant subspace of A and an invariant subspace of $A+\lambda$ (see [2]).

In view of Corollary 3 and ARVESON's result about the unilateral shift it seems likely that the following is true.

Conjecture. *A transitive algebra containing a weighted shift with non-zero weights is* $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$.

Corollary 2 suggests that one might be able to show that a transitive algebra which contains a non-zero compact operator must be $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$. Such a theorem would undoubtedly be extremely difficult to prove however. The corollaries of such a theorem would be striking: for example, one corollary would be the result that if A is a compact operator and B is any operator that commutes with A, then A and B have a common non-trivial invariant subspace. In particular this would prove that every operator which commutes with a compact operator has a non-trivial invariant subspace.

Note that ARVESON's lemma, the above Theorem, and Corollaries 1 and 2 remain valid if $\mathfrak{H}$ is a Banach space and the algebras considered are strongly closed. It can then be shown that Corollaries 3 and 4 hold for Donoghue operators on l^p for $1<p<\infty$.

References

[1] W. B. ARVESON, A density theorem for operator algebras, *Duke Math. J.*, **34** (1967), 635—647.
[2] T. CRIMMINS and P. ROSENTHAL, On the decomposition of invariant subspaces, *Bull. A. M. S.*, **73** (1967), 97—99.
[3] P. R. HALMOS, *A Hilbert space problem book* (Princeton, 1967).
[4] E. A. NORDGREN, Invariant subspaces of a direct sum of weighted shifts, *Pac. J. Math.*, **27** (1968), 589—598.
[5] H. RADJAVI and P. ROSENTHAL, On invariant subspaces and reflexive algebras (to appear in *Amer. J. Math.*).
[6] P. ROSENTHAL, *On lattices of invariant subspaces*, Dissertation, University of Michigan (1967).

UNIVERSITY OF NEW HAMPSHIRE,
UNIVERSITY OF TORONTO

(Received Aug. 21, 1968)

Decompositions and extensions of operator valued representations of function algebras

By W. MLAK in Kraków (Poland)

The present paper deals with some decompositions of operator representations of a quite arbitrary algebra $A \subset C(\Omega)$ with respect to the totality of all Gleason parts of A. Our approach is dilation free, that is no Ω-dilatability of the representation is required. The investigations which brought the author to the results enclosed in the present paper have been inspired by the question to what extend hold true the theorems of D. SARASON's paper [8]. In the light of the theorems which we present here the decomposition results enclosed in [8] appear to us as more subtle forms of some general decompositions. This is possible because of such special properties of the algebra A as the Dirichlet algebra property, the absence of non-zero completely singular orthogonal measures, the explicit characterization of some Gleason parts, the dilatability of the related representation, etc.

Let us point that some orthogonal decompositions appear in this paper as a consequence of a more general type of decomposition performed with the help of projections which are not necessarily self-adjoint. The basic means of our investigations is the abstract version of the M. and F. Riesz theorem given by I. GLICKSBERG in [3].

Section 3 concerns extensions of the absolutely continuous parts of representations to representations of some algebras of H^∞ type. Also in this case our methods are dilation free. Even more, we show that under the assumption of local character the related absolutely continuous representations are dilatable in a pretty way.

1. Throughout the present paper H stands for a complex Hilbert space with the inner product (x, y) $(x, y \in H)$ and the norm $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. The algebra of all linear bounded operators in H is denoted by $L(H)$. I is the identity operator in H. For $T \in L(H)$ $\|T\|$ is the norm and T^* is the adjoint of T. We say that $T \in L(H)$ is a projection if $T^2 = T$. The projection T is orthogonal if $T = T^*$.

Let Ω be a compact Hausdorff space and let $C(\Omega)$ and $C_R(\Omega)$ be the Banach algebra of all complex or real valued continuous functions on Ω, respectively, with the norm

$$\|u\| = \sup_{\Omega} |u(\omega)|.$$

The function algebra is by definition the subspace of $C(\Omega)$ which is closed under multiplication and contains constants. The functions belonging to the algebra are not required to separate the points of Ω.

We consider in the present paper merely Baire measures and Baire measurable functions. We say that the complex measure p is orthogonal to the algebra A and we write $p \perp A$ if $\int u\,dp = 0$ for all $u \in A$. We are now able to present some results of [3], which we need for our purposes.

Let φ be a homomorphism of A into the complex field. M_φ stands for the totality of all probability measures m on Ω such that

$$\int u\,dm = \varphi(u) \quad \text{for} \quad u \in A.$$

We say that a Baire set $\sigma \subset \Omega$ is φ-null if $m(\sigma) = 0$ for every $m \in M_\varphi$. The measure p is φ-absolutely continuous if it vanishes on every φ-null set. We then write $p \ll M_\varphi$. We say that the measure p is φ-singular if it is concentrated on a φ-null set. Every finite Baire measure has a unique φ-decomposition

$$p = p^a + p^s \tag{1.1}$$

where $p^a \ll M_\varphi$ and p^s is φ-singular. The measure p is said to be completely singular if it is φ-singular for every φ.

The abstract M. and F. Riesz theorem proved in [3] reads as follows:

(1. 2) If $p \perp A$ and (1. 1) is the φ-decomposition of p, then $p^a \perp A$ and $p^s \perp A$.

It is proved moreover in [3] that the following holds true:

(1. 3) If φ and ψ are in the same Gleason part G of the maximal ideals space $M(A)$ of A, then the φ-decomposition of p coincides with its ψ-decomposition. If φ and ψ are in different Gleason parts then the component $p^a \ll M_\varphi$ is ψ-singular.

It follows from the first part of (1. 3) that p^a and p^s depend only on the Gleason part to which φ belongs. This justifies us to say that (1. 1) is the decomposition of p with respect to the Gleason part $G(\varphi \in G)$ and write $p^a \ll G$ calling p^s the G-singular part of p.

Suppose we are given a linear map $T: A \to L(H)$ such that for some finite k

$$\|T(u)\| \leq k\|u\| \quad \text{for all} \quad u \in A. \tag{1.4}$$

This is a trivial consequence of the Hahn—Banach extension theorem and the Riesz representation theorem that there are measures $p_{x,y}$ $(x, y \in H)$ such that

$$\|p_{x,y}\| \leq k\|x\|\,\|y\| \quad \text{for} \quad x, y \in H, \tag{1.5}$$

$$(T(u)x, y) = \int u\,dp_{x,y} \quad \text{for} \quad u \in A \quad \text{and} \quad x, y \in H. \tag{1.6}$$

The measures $p_{x,y}$ which satisfy (1. 5) and (1. 6) will be called elementary measures of the map T which satisfies (1. 4).

Assume that the linear map $T: A \to L(H)$ satisfying (1.4) is multiplicative, that is

(1.7) $$T(uv) = T(u)T(v) \quad \text{for all} \quad u, v \in A.$$

We then call T a representation or more precisely an operator representation, of A.

If T is a representation of A then (1.7) implies that $T(1)$ (1 stands here for the function identically equal to 1) is a projection. For every $u \in A$ and every $x \in H$ we have then $T(u)x = T(u)T(1)x$ and $T(u)(I - T(1))x = 0$. Hence, avoiding the trivial part $T(u)(I - T(1))$ of the representation T we can restrict it to $T(1)H$, which simply means that we can assume, as we do in the next section, that $T(1) = I$.

2. Suppose we are given the representation $T: A \to L(H)$ which satisfies (1.4) and let $\{p_{x,y}\}$ be a certain collection of its elementary measures. We fix the Gleason part of $M(A)$ and decompose each $p_{x,y}$ as

$$p_{x,y} = p^a_{x,y} + p^s_{x,y},$$

where $p^a_{x,y} \ll G$ and $p^s_{x,y}$ is G-singular. We then obtain

(2.1) $$(T(u)x, y) = \int u \, dp^a_{x,y} + \int u \, dp^s_{x,y} \qquad (u \in A, \ x, y \in H).$$

The equality $(T(u)(x+y), z) = (T(u)x, z) + (T(u)y, z)$ and (2.1) imply that

$$\int u \, dp^a_{x+y,z} - \int u \, dp^a_{x,z} - \int u \, dp^a_{y,z} + \int u \, dp^s_{x+y,z} - \int u \, dp^s_{x,z} - \int u \, dp^s_{y,z} = 0,$$

that is

$$(p^a_{x+y,z} - p^a_{x,z} - p^a_{y,z}) + (p^s_{x+y,z} - p^s_{x,z} - p^s_{y,z}) \perp A.$$

By the M. and F. Riesz theorem (1.2) we have for $u \in A$

(2.2) $$\int u \, dp^a_{x+y,z} = \int u \, dp^a_{x,z} + \int u \, dp^a_{y,z}, \quad \int u \, dp^s_{x+y,z} = \int u \, dp^s_{x,z} + \int u \, dp^s_{y,z}.$$

It follows that the functionals

$$\xi^a(u; x, y) = \int u \, dp^a_{x,y} \quad \text{and} \quad \xi^s(u; x, y) = \int u \, dp^s_{x,y}$$

are additive with respect to x. Using similar arguments, one verifies easily that these functionals are homogeneous in x and antilinear in y. Summing up we conclude that if u is fixed, ξ^a and ξ^s are bilinear forms on $H \times H$. On the other hand, $\|p^a_{x,y}\| \leq k\|x\| \, \|y\|$ and $\|p^{x,y}_s\| \leq k\|x\| \, \|y\|$, which implies that there are $T^a(u)$ and $T^s(u) \in L(H)$ such that for $x, y \in H$ we have $\xi^a(u; x, y) = (T^a(u)x, y)$, $\xi^s(u; x, y) = (T^s(u)x, y)$, and $\|T^a(u)\| \leq k\|u\|$, $\|T^s(u)\| \leq k\|u\|$. By (2.1) and the definitions of ξ^a, ξ^s we have

(2.3) $$T(u) = T^a(u) + T^s(u) \quad \text{for} \quad u \in A.$$

Since ξ^a, ξ^s are linear in u, $T^a(u)$ and $T^s(u)$ are linear in u. We did not use up till now the multiplicativity of T, which yields the equalities

$$(T(v)T(u)x, y) = \int uv\, dp^a_{x,y} + \int uv\, dp^s_{x,y} = (T(v)x, T(u)^* y) =$$
$$= \int v\, dp^a_{x,T(u)^* y} + \int v\, dp^s_{x,T(u)^* y}$$

which by (1. 2) prove that

$$\int v\, dp^a_{x,T(u)^* y} = \int uv\, dp^a_{x,y}, \quad \int v\, dp^s_{x,T(u)^* y} = \int uv\, dp^s_{x,y},$$

that is, by definition of T^a and of T^s,

(2. 4) $$(T^a(v)x, T(u)^* y) = (T^a(uv)x, y), \quad (T^s(v)x, T(u)^* y) = (T^s(uv)x, y).$$

(2. 4) and (2. 3) give us

$$\int u\, dp^a_{T^a(v)x,y} - \int uv\, dp^a_{x,y} + \int u\, dp^s_{T^a(v)x,y} = 0.$$

Using (1. 2) we infer therefore that

$$(T^a(u)T^a(v)x, y) = \int u\, dp^a_{T^a(v)x,y} = \int uv\, dp^a_{x,y} = (T^a(uv)x, y).$$

Since x and y are arbitrary, the equality

(2. 5) $$T^a(uv) = T^a(u)T^a(v) \quad (u, v \in A)$$

follows. By the same token

(2. 6) $$T^s(uv) = T^s(u)T^s(v) \quad (u, v \in A),$$

which shows that both T^a and T^s are representations. We deduce therefore that $T^a(1)$ is a projection which together with the equality $T^a(1)+T^s(1) = I$ proves that (2. 3) gives us the decomposition of T into the direct sum of T^a and T^s.

The components T^a and T^s do not depend in some sense on the choice of elementary measures. Indeed, let $\{\tilde{p}_{x,y}\}$ be an arbitrary system of finite measures such that $(T(u)x, y) = \int u\, d\tilde{p}_{x,y}$ for all $u \in A$ and all $x, y \in H$. Applying (1. 2) and using the previous elementary measures $p_{x,y}$ we get that

$$(T^a(u)x, y) = \int u\, d\tilde{p}^a_{x,y} \quad \text{and} \quad (T^s(u)x, y) = \int u\, d\tilde{p}^s_{x,y}$$

for all $u \in A$ and all $x, y \in H$. This simply means that T^a and T^s do not depend on the manner we extend boundedly the functionals $u \to (T(u)x, y)$. All this gives rise to the following

Definition. We say that the linear bounded map $T: A \to L(H)$ is *G-continuous (G-singular)* if ther eis a system of finite measures $\{p_{x,y}\}$ such that $p_{x,y} \ll G$

($p_{x,y}$ G-singular) and $(T(u)x, y) = \int u\, dp_{x,y}$ for all $u \in A$ and all $x, y \in H$. We write $T \ll G$ if T is G-continuous and $T \perp G$ if T is G-singular.

Summing up we formulate the following theorem:

Theorem 2. 1. *Suppose T: $A \to L(H)$ is a linear map such that $\|T(u)\| \leqq k\|u\|$ for all $u \in A$. Then T may be written in a unique way as the sum $T = T^a + T^s$ of linear maps of A into $L(H)$ such that $T^a \ll G$ and $T^s \perp G$. The maps T^a, T^s satisfy $\|T^a(u)\| \leqq$ $\leqq k\|u\|$ and $\|T^s(u)\| \leqq k\|u\|$ for $u \in A$. If T is a representation then both T^a and T^s are representations and T is the direct sum of T^a and T^s.*

Suppose we are given two Gleason parts, G_1 and G_2, of $M(A)$. We will prove the following

Theorem 2. 2. *Let T: $A \to L(H)$ be a representation of A. Let $T = T_i^a + T_i^s$ $(i=1, 2)$ be the decompositions of T such that $T_i^a \ll G_i$ and $T_i^s \perp G_i$ for $i=1, 2$ and assume that $G_1 \neq G_2$. Then*

$$T_1^a(u)\, T_2^a(v) = 0 \text{ and } T_1^s(u)\, T_2^a(v) = T_2^a(uv) \text{ for } u, v \in A.$$

Proof. Since $T = T_1^a + T_2^s = T_2^a + T_2^s$, the second part of Th. 2. 1 gives $TT_2^a = T_1^a T_2^a + T_1^s T_2^a$, which again by Th. 2. 1 implies that $(T_1^a(u) T_2^a(v)x, y) +$ $+(T_1^s(u) T_2^a(v)x, y) - (T_2^a(uv)x, y) = 0$. We get therefore for decompositions

$$p_{x,y} = p_{x,y}^{a,i} + p_{x,y}^{s,i} \qquad (p_{x,y}^{a,i} \ll G_i,\ p_{x,y}^{s,i}\ G_i\text{-singular})$$

of elementary measures $p_{x,y}$ of T the equalities

$$\int u\, dp^{a,1}_{T_2^a(v)x, y} - \int u\, dp^{s,1}_{T_2^a(v)x, y} - \int uv\, dp^{a,2}_{x,y} = 0,$$

which by (1. 2) gives us that

$$(T_1^a(u)\, T_2^a(v)\, x, y) = \int u\, dp^{a,1}_{T_2^a(v)x, y} = 0$$

and

$$(T_1^s(u)\, T_2^a(v)\, x, y) = \int u\, dp^{s,1}_{T_2^a(v)x, y} = \int uv\, dp^{a,2}_{x,y} = (T_2^a(uv)\, x, y),$$

because $p_{x,y}^{a,2}$ are G_1-singular for all x and y. Since x and y are arbitrary the proof is complete.

Using the notation of the above theorem we conclude that $T_2^a(v) = T_1^s(1) T_2^a(v)$ for $v \in A$, which implies the inclusion $T_2^a(A)H \subset T_1^s(1)H$. We can now decompose the representation T_1^s with respect to G_2 and thus obtain the decomposition of the original T into there parts, the first two of which are G_1- and G_2-continuous, respectively, and the last one is G_1- as well as G_2-singular. It is then possible to continue this approach using for instance the Kuratowski—Zorn lemma and thus get a full limit decomposition of T with regard to the totality of all Gleason parts of $M(A)$ plus a certain "completely singular" component, i.e. a G-singular one for each Gleason part G. In what follows we will be interested rather in the typical Hilbert space approach which leads to orthogonal decompositions. We assume namely in all what follows that

$$(2.7) \qquad k=1, \quad \text{i.e.} \quad \|T(u)\| \leqq \|u\| \quad \text{for} \quad u \in A,$$

and once again explicitly that

$$(2.8) \qquad T(1) = I.$$

The reformulation of Th. 2. 1 will read now as follows:

Theorem 2. 3. *Let $T: A \to L(H)$ be a representation which satisfies* (2. 7) *and* (2. 8). *Then T is a unique orthogonal sum $T = T^a \oplus T^s$ of representations $T^a \ll G$ and $T^s \perp G$.*

Let $\{G_\alpha\}$ be an indexed set of all Gleason parts of $M(A)$ such that if $\alpha \neq \beta$ then $G_\alpha \neq G_\beta$. Write $P_\alpha = T^a(1)$ where T^a is the G_α-continuous part of the representation T satisfying (2. 7) and (2. 8), in accordance to Th. 2. 3. It follows from Th. 2. 2 that $P_\alpha P_\beta = 0$ for $\alpha \neq \beta$. Certainly P_α are orthogonal projections. We define

$$P^a = \oplus P_\alpha \quad \text{and} \quad P^s = I - P^a.$$

Every subspace $H_\alpha = P_\alpha H$ reduces T. Consequently so does $P^s H$. It follows that

$$(2.9) \qquad T(u) = (\oplus T(u) P_\alpha) \oplus T(u) P^s \quad \text{for all} \quad u \in A.$$

By Th. 2. 1 the part of T in every H_α is a representation. It follows that the part of T in $P^s H$ is a representation too.

The subspaces H_α and $H^s = P^s H$ may be characterized as follows:

(2. 10) The following conditions are equivalent:

(a) $x \in H_\alpha$ $(x \in H^s)$.

(b) There exists a positive measure $p_0 \ll G_\alpha$ (p_0 completely singular) such that $(T(u)x, x) = \int u \, dp_0$ for all $u \in A$.

(c) If $\int u \, dp = (T(u)x, x)$ for each $u \in A$ for some positive measure p, then $p \ll G_\alpha$ (p is completely singular).

Proof. We will give the proof in the absolutely continuous case. The case of a completely singular part may be treated in a quite similar way. First notice that (a) implies (b) by the definition of H_α. To show that (b) implies (c) we argue as follows:

If $\int u \, dp = (T(u)x, x)$ for $u \in A$ then $p - p_0 \perp A$. Hence $(p - p_0^a) + p_0^s \perp A$, where $p^a \ll G$ and $p^s \perp G$. This gives us by (1. 2) that $\int u \, dp^s = 0$ for $u \in A$. Since $1 \in A$ and p^s is a positive measure, it vanishes identically. Q.E.D.

In order to prove that (c) implies (a) we proceed as follows:

Let $p_{x,x}$ be a suitable elementary measure. Assuming (c) we get that $p_{x,x} \ll G_\alpha$. Hence the part $p^s_{x,x} \perp G_\alpha$ vanishes. It follows that $0 = p^s_{x,x}(\Omega) = ((I-P_\alpha)x, x) = \|(I-P_\alpha)x\|^2$, which completes the proof.

Suppose now that besides of (2. 9) T has the decomposition

$$T(u) = (\oplus T_\alpha(u)) \oplus T_s(u),$$

where T_α are G_α-continuous representations and T_s is a completely singular one. Let

$$H = (\oplus H'_\alpha) \oplus H'_s$$

be the corresponding decomposition of the representation space. For $x \in H'_\alpha$ there is a measure $p \ll G_\alpha$ such that $(T(u)x, x) = (T_\alpha(u)x, x) = \int u\, dp$ for $u \in A$ because $T_\alpha \ll G_\alpha$. By (2. 10) $x \in H_\alpha$. It follows that $H'_\alpha \subset H_\alpha$. Hence $H_\alpha \ominus H'_\alpha \subset \left(\bigoplus_{\alpha \neq \beta} H'_\beta\right) \oplus H'_s$. Suppose now that $x \in H_\alpha$ and $x \perp H'_\alpha$. By the above inclusion there is a sequence $\{x_n\}$ such that x_0 is the orthogonal projection of x on H'_s and x_n is the orthogonal projection of x on a suitable subspace H'_{β_n}. Hence

$$(T(u)x, x) = \sum_{n=0}^{\infty} (T(u)x_n, x_n) \quad \text{for} \quad u \in A.$$

Since $x \in H_\alpha$, there is a positive measure $p \ll G_\alpha$ such that $(T(u)x, x) = \int u\, dp$ for $u \in A$. There are also a completely singular positive measure p_0 and positive measures $p_n \ll G_{\beta_n}$ $(n = 1, 2, \dots)$ such that $(T(u)x_n, x_n) = \int u\, dp_n$ for $u \in A$ and $n = 0, 1, 2, \dots$. It follows that $p - \sum_{n=0}^{\infty} p_n \perp A$. Since each p_n is G_α-singular $(\alpha \neq \beta_n)$, the measure $\tilde{p} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n$ is G_α-singular. Hence the G_α-continuous part of $p - \tilde{p}$ equals p. By (1. 2) $p \perp A$, which implies that $(x, x) = \int 1 dp = 0$. This shows that $H_\alpha = H'_\alpha$. It is now a simple matter to show that the part of T in H_α equals T_α and the part in H^s equals T_s, which completes the proof of the uniqueness assertion of the following theorem:

Theorem 2. 4. *Suppose that $T: A \to L(H)$ is a representation of A which satisfies* (2. 7) *and* (2. 8). *Then T has a unique decomposition $T = (\oplus T_\alpha) \oplus T_s$ where T_α and T_s are representations of A such that $T_\alpha \ll G_\alpha$ for all α and T_s is completely singular.*

3. The G_α-continuous part T_α of the representation T admits an extension to a certain algebra consisting of limit functions of subsequences of A. The construction of such an extension is quite natural and simple in case of Ω-dilatable representations*). The related functional calculus for contractions may be found in [9] Chapt. III. In the general case considered in this paper we cannot apply the methods of dilation theory, because there is not known up till now whether every representation is dilatable in a suitable way. In particular we cannot assert that

$$\|T_\alpha(u)x\|^2 \leqq \int |u|^2\, dp_{x,x} \tag{3.1}$$

for some elementary measure $p_{x,x} \ll G_\alpha$ (provided $x \in H_\alpha$), which is the case when T and consequently T_α is Ω-dilatable. We shall overcome this difficulty in some way shown below.

To begin with we introduce the notation $H^\infty_{\alpha,0}$ for the class of Baire functions v such that $v = \lim v_n$ almost everywhere for each $m \in M_\varphi$ for some $\varphi \in G_\alpha$, where $v_n \in A$ and $\sup_n \|v_n\| < \infty$.

The results of [3] yield that if we identify functions which are equal up to G_α-null sets then $H^\infty_{\alpha,0}$ does not depend on the special choice of $\varphi \in G_\alpha$ (see (1.3)).

Since the construction of an extension of T_α does not require the multiplicativity of T we introduce for convenience the following condition:

($\ast$) The linear map $T\colon A \to L(H)$ satisfies (2.7) and (2.8), and for each $x \in H$ there is a positive measure p_x such that $p_x \ll G_\alpha$ and $(T(u)x, x) = \int u\, dp_x$ for $u \in A$.

Using the polarization formula and (1.2) one verifies easily that ($\ast$) is equivalent to the property that T has a system of G_α-continuous elementary measures.

Let us take now $v \in H^\infty_{\alpha,0}$ and let $v_n \to v$ a.e. for $m \in M_\varphi$ and $\|v_n\| \leqq K$ for some finite K. We take $x, y \in H$ and an elementary measure $p_{x,y} \ll G_\alpha$. Since $v_n \to v$ a.e. for $m \in M_\varphi$, the set on which $\limsup |v_n - v| > 0$ is of measure zero for each $m_\varphi \in M$. Consequently, by the dominated convergence theorem,

$$\lim\, (T(v_n)x, y) = \lim \int v_n\, dp_{x,y} = \int v\, dp_{x,y}.$$

The vectors x and y being arbitrary, there is an operator $\hat{T}(v)$ such that $\hat{T}(v) \in L(H)$ and $(\hat{T}(v)x, y) = \int v\, dp_{x,y}$ for $v \in H^\infty_{\alpha,0}$ and $x, y \in H$. Certainly $\hat{T}(v)$ does not depend on the choice of the approximating sequence $\{v_n\}$ but merely on v. It is a trivial matter to check that the map $\hat{T}\colon H^\infty_{\alpha,0} \to L(H)$ is linear. All the above holds true under the assumption ($\ast$). Write now

$$\|v\|_{\infty,0} = \inf_{\sigma \in N} \{\sup_\sigma |v|\} \quad (v \in H^\infty_{\alpha,0}),$$

*) For the definition of Ω-dilatability and related matters see [7].

where N stands for the totality of all φ-null sets. Assuming $(*)$ we infer that

$$|(\hat{T}(v)x, y)| \leqq \int |v|\, d|p_{x,y}| \leqq \|v\|_{\infty,0} \|x\| \, \|y\|$$

(because $\|p_{x,y}\| \leqq \|x\| \, \|y\|$). Hence $\hat{T}$ is a well-defined linear map of the quotient Banach algebra $H_\alpha^\infty = H_{\alpha,0}^\infty / S$ where $S = \{v\colon \|v\|_{\infty,0}^{\cdot} = 0\}$, endowed with the norm $\|v\|_\infty$ induced by $\|\cdot\|_{\infty,0}$. We have

$$\|\hat{T}(v)\| \leqq \|v\|_\infty \quad \text{for} \quad v \in H_\alpha^\infty. \tag{3.2}$$

We will show next that $\hat{T}$ is a representation of H_α^∞, provided T itself is a representation and $(*)$ holds true.

Let us consider the Banach space

$$E = L^1(|p_{x,y}|) \times L^1(|p_{x,y}|) \times H \times H$$

with the norm

$$\|\{u, v, z_1, z_2\}\| = \|u\|_{L^1} + \|v\|_{L^1} + \|z_1\| + \|z_2\|$$

and suppose that $u_n \to u \in H_\alpha^\infty$, $v_n \to v \in H_\alpha^\infty$ a.e. for $m \in M_\varphi$, where $u_n, v_n \in A$ and $\sup_n \{\|v_n\| + \|u_n\|\} < +\infty$. Then

$$\{u_n, v_n\} \to \{u, v\} \quad \text{strongly in} \quad L^1(|p_{x,y}|) \times L^1(|p_{x,y}|).$$

On the other hand

$$(T(u_n) z_1, z_2) \to (\hat{T}(u) z_1, z_2), \quad (T(v_n)^* z_1, z_2) \to (\hat{T}(v)^* z_1, z_2)$$

for all z_1 and z_2. It follows that

$$\{u_n, v_n, T(u_n)x, T(v_n)^* y\} \to \{u, v, \hat{T}(u)x, \hat{T}(v)^* y\} = q$$

weakly in E. By the classical theorem of S. MAZUR there exists a sequence $\lambda_{i,n} \geqq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$ such that $\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,n} = 1$ for all n and such that for

$$\hat{u}_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,n} u_i, \quad \hat{v}_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,n} v_i, \quad x_n = T(\hat{u}_n)x, \ y_n = T(\hat{v}_n)^* y$$

we have

$$\{\hat{u}_n, \hat{v}_n, x_n, y_n\} \to q \quad \text{strongly in} \quad E.$$

Consequently

$$(x_n, y_n) = (T(\hat{u}_n)x, T(\hat{v}_n)^* y) = (T(\hat{u}_n \hat{v}_n)x, y) = \int \hat{u}_n \hat{v}_n \, dp_{x,y} \to$$

$$\to \int uv \, dp_{x,y} = (\hat{T}(uv)x, y).$$

The strong convergence yields that

$$(T(\hat{u}_n)x, T(\hat{v}_n)^* y) \to (\hat{T}(u)x, \hat{T}(v)^* y)$$

which shows now that $(\hat{T}(u)\hat{T}(v)x, y) = (\hat{T}(u)x, \hat{T}(v)^* y) = (\hat{T}(uv)x, y)$. Since x and y are arbitrary, $\hat{T}(uv) = \hat{T}(u)\hat{T}(v)$ for $u, v \in H^*$. Q.E.D.

Assuming only $(*)$ we get that $\hat{T}$ is *weakly continuous* in the following sense: If $v_n, v \in H_\alpha^\infty$, $\sup \|v_n\|_\infty < +\infty$, and $v_n \to v$ a.e. for each $m \in M_\varphi$, then $\hat{T}(v_n) \to \hat{T}(v)$ weakly.

It is a trivial matter to show that if some weakly continuous linear bounded map coincides on A with $\hat{T}$, then it is identical with $\hat{T}$. Summing up we get the following theorem:

Theorem 3. 1. *Suppose that $(*)$ holds true. Then there is a unique weakly continuous linear map $\hat{T}$: $H_\alpha^\infty \to L(H)$ such that $T(u) = \hat{T}(u)$ for $u \in A$. Moreover, $\|\hat{T}(u)\| \leqq \|u\|_\infty$ for $u \in H_\alpha^\infty$. If the original T is a representation of A then $\hat{T}$ is a representation of H_α^∞.*

If T is Ω-dilatable then (3. 1) holds true. This implies that $\hat{T}$ is then strongly continuous. More precisely, the following holds true:

(3. 3) If T satisfies $(*)$ and is Ω-dilatable, and if $v_n, v \in H_\alpha^\infty$, $\sup \|v_n\|_\infty < \infty$, and $v_n \to v$ a.e. for $m \in M_\varphi$, then $\hat{T}(v_n) \to \hat{T}(v)$ strongly.

If φ admits central measures, i.e. measures $m' \in M_\varphi$ such that $m \ll m'$ for all $m \in M_\varphi$, then H_α^∞ may be treated as the Banach subalgebra of $L^\infty(m')$. This is the case if Ω is a metric space (see [9]). If A is a hypo-dirichlet algebra then the (necessarily unique) Arens—Singer measure $m' \in M_\varphi$ is central (see [1]), and moreover

$$H_\alpha^\infty = L^\infty(m') \cap H^2(m') \tag{3. 4}$$

where $H^2(m')$ is the $L^2(m')$ closure of A ([1] Col. p. 129). If M_φ reduces to a single measure set $\{m\}$ then (3. 4) holds true on the basis of the extension of the Wermer—Hoffman lemma given in [3] (Th. 2. 1 of [3]). In this case our Th. 3. 1 gives immediately the functional calculus of contractions having unitary dilations with Lebesgue spectrum. The algebra H_α^∞ is then simply the disc algebra H^∞. Suppose A separates the points of Ω.

Theorem 3. 2. *Assume that the linear map T satisfies $(*)$. Suppose that there is a unique probability measure m representing $\varphi \in G_\alpha$, where G_α is the Gleason part of $M(A)$. Then there exists a unique semi-spectral measure F: $B \to L(H)$ (on the σ-field B of Baire sets in Ω) such that*

$$T(u) = \int u\, dF \quad \textit{for} \quad u \in A.$$

F is absolutely continuous with regard to m, i.e. $(Fx, x) \ll m$ for every $x \in H$.

The proof of the above theorem is based on the following property:

(3. 5) Suppose the homomorphism φ has a unique representing probability measure m. If $\int u\, h\, dm = 0$ for some real $h \in L^1(m)$ and all $u \in A$, then $h = 0$ a.e. for m.

The proof of (3.5) is exactly the same as that of Th. 6. 7 of [4]. One has to use Th. 4 of [6] which together with the Arens lemma quoted in [4] (Lemma 6. 6) guarantees that the arguments applied in [4] work well under the only assumption of the uniqueness of m for a single φ.

Proof of Theorem 3. 2. It follows from (3. 5) that for every $z \in H$ there is a unique positive measure $p_z \ll m$ such that

$$(T(u)z, z) = \int u \, dp_z \quad \text{for} \quad u \in A.$$

Since for $x, y \in H$

$$T((u)(x+y), x+y) + (T(u)(x-y), x-y) = 2\{(T(u)x, x) + (T(u)y, y)\},$$

we have $p_{x+y} + p_{x-y} - 2[p_x + p_y] \perp A$, which by (3. 5) implies

$$p_{x+y} + p_{x-y} = 2\{p_x + p_y\}. \tag{3. 6}$$

Next, since $\int u \, dp_{\alpha x} = (T(u)\alpha x, \alpha x) = |x|^2 \int u \, dp_x$, we get by similar arguments

$$p_{\alpha x} = |\alpha|^2 p_x. \tag{3. 7}$$

Define now $p_{x,y} = \frac{1}{2}(p_{x+y} - p_{x-y})$. Then for real α

$$\int u \, dp_{\alpha x, y} = \frac{1}{4}\{(T(u)(\alpha x + y), \alpha x + y) - (T(u)(\alpha x - y), \alpha x - y)\} =$$

$$= \frac{1}{4}\{(T(u)(x+y), x+y) - (T(u)(x-y), x-y)\} = \alpha \int u \, dp_{x,y}$$

which by (3. 5) gives

$$p_{\alpha x, y} = \alpha p_{x,y} \quad \text{for real} \quad \alpha. \tag{3.8}$$

Using now the suitable parts of the proof of Th. I of [10] we infer from (3. 6)—(3. 8) that, setting $p_{x,y} = p_{x,y} - p_{ix,y}$, $q_{x,y}(\sigma)$ is for each fixed Baire set σ a hermitian symmetric bilinear form in x and y such that $q_{x,x} = p_x$ for every x. Hence $\|q_{x,x}\| = \|x\|^2$, which implies that there is a semi-spectral measure F such that $T(u) = \int u \, dF$ for all $u \in A$. If $T(u) = \int u \, dE$ for some other semi-spectral E then by (1. 2) $E \ll m$. It follows then that $A \perp (Fx, x) - (Ex, x) \ll m$, which by (3. 5) gives that $(Ex, x) = (Fx, x)$. Q.E.D.

Theorem 3. 2 is equivalent to the following statement: Under the uniqueness of the representing measure m of $\varphi \in M(A)$, every map T satisfying ($*$) with $\varphi \in G_\alpha$ is Ω-dilatable in an essentially unique way.

Assume for a while that every $\varphi\in M(A)$ has a unique representing measure and let T be a representation of A satisfying (2. 7) and (2. 8). It follows then from Th. 2. 3 and from the above that the part $\oplus T(u)P_\alpha$ of decomposition (2. 9) is uniquely Ω-dilatable.

Combining Th. 3. 1 with Th. 3. 2 and Remark (3. 3) we get the following

Theorem 3. 3. *Suppose m is the unique representing measure for $\varphi\in M(A)$. Let T be a linear map satisfying $(\ast)$. Then there exists a unique strongly continuous map $\hat{T}$ of $H_\alpha^\infty(m)=L^\infty(m)\cap H^2(m)$ into $L(H)$ such that $T(u)=\hat{T}(u)$ for $u\in A$. Moreover, $\|\hat{T}(u)\|\leqq\|u\|_\infty$ for $u\in H_\alpha^\infty$ and $\hat{T}(u)=\int u\,dF$ for $u\in H_\alpha^\infty$ where F is the semi-spectral measure corresponding to T by Th. 3. 2. If T is a representation then so is $\hat{T}$.*

It follows from Th. 4 of [5] that the uniqueness of m implies that $H_\alpha^\infty(m)$ is a logmodular algebra on the maximal ideal space $\hat{\Omega}$ of the algebra $L^\infty(m)$. Using other results of [4] and [5], namely the extended Gleason—Whitney extension theorem, one verifies that

$$\hat{T}(u)=\int \hat{u}\,d\hat{F}\quad\text{for}\quad \hat{u}\in H_\alpha^\infty(\hat{m}) \tag{3.10}$$

where $\hat{u}$ is the Gelfand image on $\hat{\Omega}$ of $u\in L^\infty(m)$, $\hat{m}$ stands for the unique representing measure on $\hat{\Omega}$ of the positive extension on $H_\alpha^\infty(m)$ of the functional $u\to\int u\,dm$ $(u\in A)$, and $\hat{F}$ is the $\hat{m}$-continuous semi-spectral measure on Baire subsets of $\hat{\Omega}$. The uniqueness of $\hat{F}$ follows from Th. 3. 2 by the $\hat{m}$-continuity of $\hat{F}$ by putting $A=H_\alpha^\infty(\hat{m})\subset C(\hat{\Omega})$. Consequently, if the original T is a representation of A then $\hat{T}\colon A=H_\alpha^\infty(\hat{m})\to L(H)$ is a G-continuous representation, where G is the Gleason part of $M(H_\alpha^\infty(\hat{m}))$ which includes $\hat{m}$, and the decomposition (2. 9) reduces to the G-continuous component.

References

[1] P. R. Ahern and D. Sarason, The H^p spaces of a class of functions algebras, *Acta Math.*, **117** (1967), 123—163.

[2] J. Garnett and I. Glicksberg, Algebras with the same multiplicative measures, *J. Functional Anal.*, **1** (1967), 331—341.

[3] I. Glicksberg, The abstract F. and M. Riesz theorem, *ibidem*, **1** (1967), 109—122.

[4] K. Hoffman, Analytic functions and logmodular Banach algebras, *Acta Math.*, **108** (1962), 271—317.

[5] K. Hoffman and H. Rossi, Function theory and multiplicative linear functionals, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **116** (1965), 536—543.

[6] G. Lumer, Analytic functions and Dirichlet problem, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **70** (1964), 98—104.

[7] W. Mlak, A note on Szegő type properties of semi-spectral measures, *Studia Math.*, **31** (1968), 241—251.

[8] D. SARASON, On spectral sets having connected complement, *Acta Sci. Math.*, **26** (1965) 289—299.
[9] B. SZ.-NAGY et C. FOIAŞ, *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert* (Budapest, 1967).
[10] P. JORDAN and J. von NEUMANN, On inner products in linear metric spaces, *Ann. of Math.*, 36 (1935), 719—723.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, POLISH ACADEMY OF SCIENCES
SECTION KRAKÓW.

(Received November 2, 1968)

Une propriété de type de Darboux dans les algèbres de von Neumann

Par GR. ARSENE et L. ZSIDÓ à Bucarest (Roumanie)

Dans [6] § IV, on a donné une nouvelle démonstration d'un théorème de plongement de SINAÏ en utilisant une propriété de type de Darboux de l'espérance conditionnelle d'une sous-tribu dans un espace mesuré.

Dans la présente Note, nous montrons que cette propriété est valable aussi pour l'espérance conditionnelle „non-commutative" définie dans [2] et [5] et on en donne quelques applications.

La terminologie concernant les algèbres de von Neumann est celle de [3] et la terminologie concernant la théorie de la mesure est celle de [1].

*

Soient $\mathscr{A}$ une algèbre de von Neumann opérant dans un espace hilbertien H, φ une trace normale fidèle et finie sur $\mathscr{A}$ telle que $\varphi(I)=1$. Nous désignerons par $\mathscr{A}'$ le commutant de $\mathscr{A}$ et par $\mathfrak{z}(\mathscr{A})$ le centre de $\mathscr{A}$. Soit $\mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}$ un sous-algèbre de von Neumann et $T \in \mathscr{A}^+$. Posons $\varphi_T(S)=\varphi(TS)$ $(S \in \mathscr{A}_1)$. D'après le Lemme 14. 1 de [4] il existe un opérateur $E(T|\mathscr{A}_1) \in \mathscr{A}_1^+$ tel que

$$\varphi_T(S) = \varphi_{E(T|\mathscr{A}_1)}(S) \qquad (S \in \mathscr{A}_1).$$

Si $T \in \mathscr{A} \cap \mathscr{A}_1'$, on a $E(T|\mathscr{A}_1) \in \mathfrak{z}(\mathscr{A}_1)$ (*cf.* th. 3, ch. I, § 6 de [3]).

Le but de cette Note est de démontrer le théorème suivant:

Théorème. *Soient* $P_1, P_2 \in \mathscr{A} \cap \mathscr{A}_1'$ *des projecteurs,* $P_1 \leqq P_2$ *et* $T \in \mathscr{A}_1^+$. *Si* $E(P_1|\mathscr{A}_1) \leqq T \leqq E(P_2|\mathscr{A}_1)$, *il existe un projecteur* $P_0 \in \mathscr{A} \cap \mathscr{A}_1'$ *tel que*

(I) $$P_1 \leqq P_0 \leqq P_2 \quad et$$

(II) $$T - \varepsilon_0 I \leqq E(P_0|\mathscr{A}_1) \leqq T,$$

où ε_0 *est le plus petit nombre positif* ε *tel que pour tout projecteur* $Q \in \mathscr{A}$, $Q \leqq P_2 - P_1$, $Q \neq O$ *il existe un projecteur* $Q_1 \in \mathscr{A} \cap \mathscr{A}_1'$, $Q_1 \leqq Q$, $Q_1 \neq O$ *tel que* $E(Q_1|\mathscr{A}_1) \leqq \varepsilon I$. *Si, en outre* $P_1, P_2, Q_1 \in \mathfrak{z}(\mathscr{A})$, *alors* $P_0 \in \mathfrak{z}(\mathscr{A})$.

Démonstration. Notons $\mathscr{P}=\{P\in\mathscr{A}\cap\mathscr{A}_1';\ P$ projecteur, $P_1\leqq P\leqq P_2$ $E(P|\mathscr{A}_1)\leqq T\}$. Comme $P_1\in\mathscr{P}$, $\mathscr{P}$ n'est pas vide. Munnissons $\mathscr{P}$ de la relation d'ordre habituelle. Soit $\mathscr{S}$ une partie totalement ordonnée de $\mathscr{P}$. $\mathscr{S}$ est alors un ensemble filtrant croissant, majoré par I. Comme $\mathscr{A}\cap\mathscr{A}_1'$ est une algèbre de von Neumann, $S=\sup\mathscr{S}$ est un projecteur dans $\mathscr{A}\cap\mathscr{A}_1'$ avec $P_1\leqq S\leqq P_2$. Soit $\{S_\alpha\}\subset\mathscr{S}$ une suite généralisée croissante, telle que $\sup S_\alpha=S$. Alors $E(S_\alpha|\mathscr{A}_1)\nearrow E(S|\mathscr{A}_1)$, donc $E(S|\mathscr{A}_1)\leqq T$ et $S\in\mathscr{P}$. D'après le lemme de Zorn, $\mathscr{P}$ possède un élément maximal P_0. Puisque $P_0\in\mathscr{P}$, on a $P_1\leqq P_0\leqq P_2$ et $E(P_0|\mathscr{A}_1)\leqq T$. Soit $\varepsilon>0$ tel que pour tout projecteur $Q\in\mathscr{A}$, $Q\neq 0$, $Q\leqq P_2-P_1$ il existe un projecteur $Q_1\in\mathscr{A}\cap\mathscr{A}_1'$, $Q_1\leqq Q$, $Q_1\neq O$ tel que $E(Q_1|\mathscr{A}_1)\leqq\varepsilon I$. Montrons que $T-\varepsilon I\leqq E(P_0|\mathscr{A}_1)$. En effet, soit $T_1=E(P_0|\mathscr{A}_1)-T+\varepsilon I$; T_1 est alors un opérateur hermitien de $\mathscr{A}_1$. En raisonnant par l'absurde, supposons qu'il y a des projecteurs spectraux de T_1 avec $T_1F<O$. Soit alors F_0 le projecteur spectral de T_1, maximal avec la propriété $T_1F<O$. Puisque $P_2-P_0\in\mathscr{A}_1'$ et $F_0\in\mathscr{A}_1$, $F_1=F_0(P_2-P_0)$ est un projecteur de $\mathscr{A}_1$ et $F_1\leqq P_2-P_1$. Le projecteur F_0 permute avec T_1 et $E(P_0|\mathscr{A}_1)\in\mathfrak{Z}(\mathscr{A}_1)$; donc F_0 permute avec T. Alors l'inégalité $T\leqq E(P_2|\mathscr{A}_1)$ implique

$$F_0T\leqq F_0E(P_2|\mathscr{A}_1) \tag{1}$$

Par définition

$$F_0E(P_0|\mathscr{A}_1)<F_0T-\varepsilon F_0. \tag{2}$$

Les relations (1) et (2) montrent que $F_0[E(P_2|\mathscr{A}_1)-E(P_0|\mathscr{A}_1)]>O$; mais la trace φ est fidèle et par consequent: $\varphi(F_1)=\varphi(F_0(P_2-P_0))=\varphi\{F_0[(E(P_2|\mathscr{A}_1)-E(P_0|\mathscr{A}_1)]\}\neq 0$, donc $F_1\neq O$.

D'après l'hypotèse du théorème, il existe un projecteur $F_2\in\mathscr{A}\cap\mathscr{A}'$, $F_2\leqq F_1$, $F_2\neq O$ avec $E(F_2|\mathscr{A}_1)\leqq\varepsilon I$. Notons $Q=P_0+F_2$; alors Q est un projecteur parce que $P_0F_2=F_2P_0=O$; en outre $Q\in\mathscr{A}\cap\mathscr{A}_1'$ et $P_1\leqq Q\leqq P_2$.

Pour $T,S\in\mathscr{A}$ on a $E(E(T|\mathscr{A}_1)S|\mathscr{A}_1)=E(TE(S|\mathscr{A}_1)|\mathscr{A}_1)=E(T|\mathscr{A}_1)E(S|\mathscr{A}_1)$

donc

$$(I-F_0)E(F_2|\mathscr{A}_1)=E(I-F_0|\mathscr{A}_1)E(F_2|\mathscr{A}_1)=E(E(I-F_0)|\mathscr{A}_1F_2|\mathscr{A}_1)=$$
$$=E((I-F_0)F_2|\mathscr{A}_1)=O$$

et

$$E(Q|\mathscr{A}_1)=E(P_0|\mathscr{A}_1)+E(F_2|\mathscr{A}_1)=$$
$$=F_0E(P_0|\mathscr{A}_1)+F_0E(F_2|\mathscr{A}_1)+(I-F_0)E(P_0|\mathscr{A}_1)+(I-F_0)E(F_2|\mathscr{A}_1)\leqq$$
$$\leqq F_0(T-\varepsilon I)+\varepsilon F_0+(I-F_0)T=T.$$

Mais $Q \in \mathscr{P}$ et $Q > P_0$ viennent en contradiction avec la maximalité de P_0. Il en résulte que $T_1 \geqq O$, donc

$$T - \varepsilon I \leqq E(P_0|\mathscr{A}_1) \leqq T.$$

Si ε_0 est le nombre dans l'énoncé du théorème, il existe une suite $\varepsilon_n \searrow \varepsilon_0$ telle que

$$T - \varepsilon_n I \leqq E(P_0|\mathscr{A}_1) \leqq T. \tag{3}$$

Passant à la limite dans (3) il résulte que

$$T - \varepsilon_0 I \leqq E(P_0|\mathscr{A}_1) \leqq T.$$

Pour la dernière assertion on considère dans $\mathscr{P}$ seulement des projecteurs de $\mathfrak{z}(\mathscr{A})$. Q.E.D.

Corollaire 1. *Soient $P_1, P_2 \in \mathscr{A} \cap \mathscr{A}_1'$ des projecteurs et soit $T \in \mathscr{A}_1^+$ tels que $P_1 \leqq P_2$ et $E(P_1|\mathscr{A}_1) \leqq T \leqq E(P_2|\mathscr{A}_1)$. Si pour tout nombre $\varepsilon > 0$ et tous projecteurs $Q \in \mathscr{A}$, $Q \neq O$, $Q \leqq P_2 - P_1$, il existe un projecteur $Q_1 \in \mathscr{A} \cap \mathscr{A}_1'$, $Q_1 \neq O$, $Q_1 \leqq Q$ tel que $E(Q_1|\mathscr{A}_1) \leqq \varepsilon I$, alors il existe un projecteur $P_0 \in \mathscr{A} \cap \mathscr{A}_1'$ avec $E(P_0|\mathscr{A}_1) = T$.*

On applique le théorème pour $\varepsilon_0 = 0$.

Corollaire 2. *Si $\mathscr{A}$ n'a pas des projecteurs minimaux, alors pour tous projecteurs $P_1, P_2 \in \mathscr{A}$ tels que $P_1 \leqq P_2$ et pour tout $\Theta \in (\varphi(P_1), \varphi(P_2))$ il existe un projecteur $P_\Theta \in \mathscr{A}$ tel que $P_1 \leqq P_\Theta \leqq P_2$ et $\varphi(P_\Theta) = \Theta$.*

Démonstration. Si l'on prend $\mathscr{A}_1 = \{\lambda I_H\}$, alors $E(T|\mathscr{A}_1) = \varphi(T)I$ pour tout $T \in \mathscr{A}$. Soit $Q \in \mathscr{A}$ un projecteur, $Q \neq O$. Comme $\mathscr{A}$ n'a pas des projecteurs minimaux il existe un projecteur $Q_1 \in \mathscr{A}$, $Q_1 \leqq Q$, $Q_1 \neq O$, $Q_1 \neq Q$. Alors $\varphi(Q_1) \leqq \frac{1}{2}\varphi(Q)$ ou $\varphi(Q - Q_1) \leqq \frac{1}{2}\varphi(Q)$. Donc les hypothèses du Corollaire 1 sont vérifiés pour $T = \Theta I$. Q.E.D.

Remarque. Si $\mathscr{A}$ est un facteur, l'inexistence des projecteurs minimaux est équivalente à la continuité du facteur.

Corollaire 3. *Soient Φ l'application canonique de $\mathscr{A}$ sur $\mathfrak{z}(\mathscr{A})$ et P_1, P_2 des projecteurs de $\mathscr{A}$ tels que $P_1 \leqq P_2$ et $T \in \mathfrak{z}(\mathscr{A})^+$. Si $\mathscr{A}$ n'a pas des projecteurs minimaux et $\Phi(P_1) \leqq T \leqq \Phi(P_2)$, il existe un projecteur $P_0 \in \mathscr{A}$ tel que $P_1 \leqq P_0 \leqq P_2$ et $\Phi(P_0) = T$.*

On applique le corollaire 2 pour $\Theta = \overline{\int}^* T\,d\mu$, où μ est la mesure pour laquelle l'algèbre $\mathfrak{z}(\mathscr{A})$ est isomorphe et isométrique avec $L^\infty(\mu)$.

L'adaptation du théorème et du Corollaire 1 dans le cas commutatif est immédiate; le Corollaire 2 exprime, dans le cas commutatif, la propriété de Darboux classique pour les mesures sans atomes.

Bibliographie

[1] N. Dinculeanu, *Vector measures* (London, 1967).
[2] J. Dixmier, Formes linéaires sur un anneau d'opérateurs, *Bull. Soc. Math. France*, **81** (1953), 9—39.
[3] J. Dixmier, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien* (Paris, 1957).
[4] I. E. Segal, A non-commutative extension of abstract integration, *Ann. of Math.*, **57** (1963), 401—457.
[5] H. Umegaki, Conditional expectation in an operator algebra, *Tohôku Math. J.*, **6** (1954), 177—181.
[6] L. Zsidó, Speranţe condiţionate şi teorema lui Sinai, *Studii cerc. mat.*, **20** (1968), 1045—1111.

(Reçu le 28. novembre 1968)

Интегрально-разностные уравнения Винера — Хопфа

И. Ц. ГОХБЕРГ и И. А. ФЕЛЬДМАН (Кишинев, СССР)

В настоящей статье излагается теория интегрально-разностных уравнений вида

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varphi(t-\delta_j) + \int_0^{\infty} k(t-s)\varphi(s)\,ds = f(t) \qquad (0 \leqq t < \infty) \tag{0.1}$$

и некоторых близких к ним. В уравнении (0.1) a_j $(j=0, \pm 1, \dots)$ — произвольные комплексные числа, δ_j $(j=0, \pm 1, \dots)$ — произвольные различные действительные числа, $k(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ и $f(t)$ $(0 < t < \infty)$ — заданные функции, а $\varphi(t)$ $(0 < t < \infty)$ — искомая функция. Кроме того, в (0. 1) полагается, что при $\delta_j > 0$ функция $\varphi(t-\delta_j)$ обращается в нуль на отрезке $0 \leqq t \leqq \delta_j$.

Уравнение (0. 1) представляет собой обобщение как интегрального уравнения Винера—Хопфа так и его дискретного аналога. Если положить $a_j = 0$ $(j \neq 0)$ и $\delta_0 = 0$, то уравнение (0. 1) совпадает с интегральным уравнением Винера—Хопфа; если $k(t) \equiv 0$ и $\delta_j = j$ $(j = 0, \pm 1, \dots)$, то относительно вектор-функции $\tilde{\varphi}(t) = \{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots\}$, где $\varphi_j(t) = \varphi(t+j-1)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$, уравнение (0. 1) является дискретным уравнением Винера—Хопфа с матрицей $\|a_{j-k}\|_{j,k=1}^{\infty}$.

В простейшем случае уравнение (0. 1) рассматривается в пространстве $L_p(0, \infty)$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$ при следующих ограничениях:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |k(t)|\,dt < \infty. \tag{0.2}$$

При этих ограничениях уравнение (0. 1) может быть записано в виде

$$\int_0^{\infty} \varphi(s)\,d\omega(t-s) = f(t) \qquad (0 \leqq t < \infty),$$

где $\omega(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ — функция ограниченной вариации без сингулярной компоненты (см. [1]). При ограничениях (0. 2) уравнению (0. 1) сопоставляется символ

$$\mathscr{W}(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{i\delta_j \lambda} + \int_{-\infty}^{\infty} k(t) e^{i\lambda t}\,dt \tag{0.3}$$

Оказывается, что оператор W, определяемый уравнением (0. 1), обратим хотя бы с одной стороны в том и только том случае, когда

$$\inf_{-\infty<\lambda<\infty} |\mathscr{W}(\lambda)| > 0.$$

При выполнении этого условия можно определить два числа

$$\nu = \lim_{l\to\infty} \frac{1}{2l} [\arg a(\lambda)]_{-l}^{l}, \qquad n = \frac{1}{2\pi} [\arg (1 + a^{-1}(\lambda)\mathscr{K}(\lambda))]_{-\infty}^{\infty},$$

где

$$a(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{i\delta_j\lambda}, \qquad \mathscr{K}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t) e^{i\lambda t}\, dt.$$

Характер обратимости оператора W определяется знаками чисел (индексов) ν и n следующим образом

$n \diagdown \nu$	$\nu>0$	$\nu=0$	$\nu<0$
$n>0$	$\varLambda$	$\varLambda$	$\varPi$
$n=0$	$\varLambda$	$\varDelta$	$\varPi$
$n<0$	$\varLambda$	$\varPi$	$\varPi$

Здесь $\varLambda$ означает обратимость только слева, $\varPi$ — обратимость только справа, а $\varDelta$ — двустороннюю обратимость.

Эти результаты, изложенные во втором параграфе, представляют собой обобщение известных результатов М. Г. Крейна [2] об уравнениях Винера—Хопфа. В их доказательстве существенную роль играет теорема о факторизации функции вида (0. 3), установленная в первом параграфе.

В третьем параграфе эти результаты получены при более слабых ограничениях на символ $\mathscr{W}(\lambda)$. В частности, в случае пространства L_2 они получен для произвольного непрерывного символа. Здесь существенно используются теоретико-кольцевые методы.

Четвертый параграф посвящен нарным интегрально-разностным уравнениям и транспонированным к ним.

§ 1. Теорема о факторизации

Обозначим через $\mathfrak{A}$ банахову алгебру всех функций вида

$$\mathscr{W}(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{i\delta_j\lambda} + \int_{-\infty}^{\infty} k(t) e^{i\lambda t}\, dt, \tag{1.1}$$

где δ_j — произвольные различные действительные числа, a_j — произвольные комплексные числа, ряд из которых абсолютно сходится, а $k(t) \in L_1(-\infty, \infty)$. Норма элемента $\mathcal{W}(\lambda)$ в $\mathfrak{A}$ определяется равенством

$$\|\mathcal{W}(\lambda)\| = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| + \int_{-\infty}^{\infty} |k(t)|\, dt,$$

а операции обычным образом.

Очевидно, алгебра $\mathfrak{A}$ содержит алгебру $\mathfrak{P}$ почти-периодическух финкций, разлагающихся в абсолютно сходящиеся ряды Фурье, и алгебру $\mathfrak{L}_0$ преобразований Фурье функций из $L_1(-\infty, \infty)$. Алгебра $\mathfrak{A}$ является прямой суммой своих подалгебр $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{L}_0$. Непосредственной проверкой устанавливается, что $\mathfrak{L}_0$ является идеалом алгебры $\mathfrak{A}$. Легко также устанавливается, что для любой пары функций $a(\lambda) \in \mathfrak{P}$ и $\mathcal{K}(\lambda) \in \mathfrak{L}_0$ выполняются соотношения

$$\inf_{-\infty<\lambda<\infty} |a(\lambda) + \mathcal{K}(\lambda)| \leqq \inf_{-\infty<\lambda<\infty} |a(\lambda)| \tag{1.2}$$

и

$$\sup_{-\infty<\lambda<\infty} |a(\lambda) + \mathcal{K}(\lambda)| \geqq \sup_{-\infty<\lambda<\infty} |a(\lambda)|. \tag{1.3}$$

Функцию $\mathcal{W}(\lambda) \in \mathfrak{A}$ назовем **невырожденной**, если

$$\inf_{-\infty<\lambda<\infty} |\mathcal{W}(\lambda)| > 0.$$

Из соотношения (1.2) вытекает, что, если функция $\mathcal{W}(\lambda) = a(\lambda) + \mathcal{K}(\lambda)$ $(a(\lambda) \in \mathfrak{P}, \mathcal{K}(\lambda) \in \mathfrak{L}_0)$ является невырожденной, то невырожденной будет и её почти-периодическая компонента $a(\lambda)$.

Каждой невырожденной функции $\mathcal{W}(\lambda) = a(\lambda) + \mathcal{K}(\lambda) \in \mathfrak{A}$ сопоставим два числа $\nu(\mathcal{W})$ и $n(\mathcal{W})$, определенных равенствами

$$\nu(\mathcal{W}) = \lim_{l\to\infty} \frac{1}{2l} [\arg a(\lambda)]_{-l}^{l}, \qquad n(\mathcal{W}) = \frac{1}{2\pi} \left[\arg\left(1 + a^{-1}(\lambda)\, \mathcal{K}(\lambda)\right)\right]_{-\infty}^{\infty}.$$

Предел в первом равенстве существует в силу известного свойства почти-периодических функций (см. [3]). Вещественное число $\nu(\mathcal{W})$ и целое число $n(\mathcal{W})$ назовем **индексами** функции $\mathcal{W}(\lambda)$. Отметим, что индексы функции не меняются при её малых возмущениях.

Обозначим через $\mathfrak{A}_+ (\mathfrak{A}_-)$ — подалгебру алгебры $\mathfrak{A}$, состоящую из всех функций вида (1.1), для которых числа δ_j неотрицательны (неположительны), а функции $k(t)$ обращаются в нуль на отрицательной (положительной) полуоси. Очевидно, все функции из подалгебры $\mathfrak{A}_+ (\mathfrak{A}_-)$ допускают голоморфные продолжения в верхнюю (нижнюю) полуплоскость.

Легко видеть, что пересечение $\mathfrak{A}_+ \cap \mathfrak{L}_0 (\mathfrak{A}_- \cap \mathfrak{L}_0)$ является идеалом алгебры $\mathfrak{A}_+ (\mathfrak{A}_-)$.

Этот параграф посвящен доказательству следующего предложения.

Теорема 1. 1. *Всякая невырожденная функция* $\mathscr{W}(\lambda)\in\mathfrak{A}$ *допускает факторизацию вида*

$$\mathscr{W}(\lambda) = \mathscr{W}_-(\lambda)e^{i\nu\lambda}\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^n\mathscr{W}_+(\lambda) \qquad (-\infty<\lambda<\infty), \tag{1.4}$$

где

$$\mathscr{W}_\pm(\lambda),\quad \mathscr{W}_\pm^{-1}(\lambda)\in\mathfrak{A}_\pm;\quad \nu=\nu(\mathscr{W})\quad \text{и}\quad n=n(\mathscr{W}).$$

Доказательство. Пусть $\mathscr{W}(\lambda) = a(\lambda)+\mathscr{K}(\lambda)\in\mathfrak{A}$ некоторая невырожденная функция. Тогда, как уже отмечалось, её почти-периодическая компонента $a(\lambda)$ также является невырожденной. Легко видеть, что индекс $\nu(b)$ почти периодической функции $b(\lambda)=e^{-i\nu\lambda}a(\lambda)$ равен нулю. Согласно известному обобщению теоремы Винера—Леви (см. [1]), функция $c(\lambda)=\ln b(\lambda)$ принадлежит алгебре $\mathfrak{P}$, т. е. функция $c(\lambda)$ имеет вид

$$c(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{i\gamma_j\lambda} \qquad \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}|c_j|<\infty\right),$$

где γ_j — различные вещественные числа.

Положим

$$c_+(\lambda) = \sum_{\gamma_j\geqq 0} c_j e^{i\gamma_j\lambda} \quad \text{и} \quad c_-(\lambda) = \sum_{\gamma_j<0} c_j e^{i\gamma_j\lambda}.$$

Тогда, очевидно,

$$a(\lambda) = a_-(\lambda)e^{i\nu\lambda}a_+(\lambda), \tag{1.5}$$

где $a_\pm(\lambda)=\exp c_\pm(\lambda)$, и стало быть, $a_\pm(\lambda)$, $a_\pm^{-1}(\lambda)\in\mathfrak{A}_\pm\cap\mathfrak{P}$. Так как функция $a^{-1}(\lambda)\,\mathscr{K}(\lambda)\in\mathfrak{L}_0$ и

$$1+a^{-1}(\lambda)\mathscr{K}(\lambda)\neq 0 \qquad (-\infty<\lambda<\infty),$$

то в силу известной теоремы М. Г. Крейна [2] о факторизации, функцию $1+a^{-1}(\lambda)\,\mathscr{K}(\lambda)$ можно представить в виде

$$1+a^{-1}(\lambda)\mathscr{K}(\lambda) = G_-(\lambda)\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^n G_+(\lambda) \qquad (-\infty<\lambda<\infty), \tag{1.6}$$

где функции $G_\pm(\lambda)$ и $G_\pm^{-1}(\lambda)$ принадлежат $\mathfrak{A}_\pm\cap\mathfrak{L}$. Здесь через $\mathfrak{L}$ обозначена алгебра, полученная из $\mathfrak{L}_0$ присоединением единицы.

Перемножая равенства (1. 5) и (1. 6) и объединяя множители с одним и тем же знаком в индексе, получим факторизацию (1. 4).

Теорема доказана.

Отметим, что функции $\mathscr{W}_\pm(\lambda)$ в факторизации (1. 4) определяются однозначно, с точностью до числового множителя.

§ 2. Интегрально-разностные операторы с абсолютно сходящимися символами

В настоящем параграфе излагается теория интегрально-разностных уравнений с абсолютно сходящимися символами.

1. *Интегрально-разностные операторы и их символы.* Обозначим через $\hat{\mathfrak{A}}$ множество всех операторов W, действующих в пространстве $L_p(0, \infty)$ по формуле

$$(2.1)\qquad (W\varphi)(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varphi(t-\delta_j) + \int_0^{\infty} k(t-s)\varphi(s)\,ds,$$

где δ_j — различные вещественные числа, a_j — комплексные числа, ряд из которых абсолютно сходится. Здесь, как и ранее, $\varphi(t-\delta_j) = 0$ при $t < \delta_j$. Легко видеть, что каждый оператор $W \in \hat{\mathfrak{A}}$ является линейным ограниченным оператором, причем

$$\|W\|_{L_p} \leqq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| + \int_{-\infty}^{\infty} |k(t)|\,dt.$$

Как будет показано ниже, в последнем соотношении при $p = 1$ достигается знак равенства.

Оператору $W \in \hat{\mathfrak{A}}$, определенному равенством (2.1), сопоставим функцию

$$(2.2)\qquad \mathscr{W}(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{i\delta_j\lambda} + \int_{-\infty}^{\infty} k(t) e^{i\lambda t}\,dt \qquad (-\infty < \lambda < \infty),$$

которую назовем символом оператора W.

Между операторами W из множества $\hat{\mathfrak{A}}$ и их символами $\mathscr{W}(\lambda) \in \mathfrak{A}$, существует взаимно-однозначное соответствие. Оно, очевидно, является линейным, но не мультипликативным (более того, произведение операторов из $\hat{\mathfrak{A}}$ может не быть оператором из этого множества). Однако это соответствие является частично мультипликативным в следующем смысле: *если операторы $W_1, W_2, W_3, \in \hat{\mathfrak{A}}$ таковы, что их символы удовлетворяют условиям $\mathscr{W}_1(\lambda) \in \mathfrak{A}_-$, $\mathscr{W}_3(\lambda) \in \mathfrak{A}_+$, то оператор $W = W_1 W_2 W_3$ принадлежит $\hat{\mathfrak{A}}$ и для его символа имеет место равенство* $\mathscr{W}(\lambda) = \mathscr{W}_1(\lambda)\mathscr{W}_2(\lambda)\mathscr{W}_3(\lambda)$. Последнее утверждение проверяется без труда и на его доказательстве мы не будем останавливаться.

Из сказанного, в частности, следует, что множество $\hat{\mathfrak{A}}_+$ ($\hat{\mathfrak{A}}_-$), состоящее из всех операторов $W \in \hat{\mathfrak{A}}$ с символами $\mathscr{W}(\lambda) \in \mathfrak{A}_+(\mathfrak{A}_-)$, образуют коммутативную алгебру. В частности, если оператов $W \in \hat{\mathfrak{A}}_\pm$ и его символ $\mathscr{W}(\lambda)$ ($\in \hat{\mathfrak{A}}_\pm$) обладает свойством $\mathscr{W}^{-1}(\lambda) \in \mathfrak{A}_\pm$, то оператор W обратим и обратным к нему является оператор W^{-1} с символом $\mathscr{W}^{-1}(\lambda)$.

2. *Сведение общего случая к простейшему.* Обозначим через $U_\nu(\infty<\nu<\infty)$ линейный ограниченный оператор, определенный в пространстве $L_p(0, \infty)$ равенством

$$(U_\nu\varphi)(t) = \begin{cases} \varphi(t-\nu), \ \max(\nu, 0)<t<\infty, \\ 0, \ 0\leqq t\leqq \max(\nu, 0). \end{cases}$$

Очевидно, $U_{-\nu}U_\nu=I$ для всех $\nu>0$, а для разности $I-U_\nu U_{-\nu}$ имеет место равенство

$$(I-U_\nu U_{-\nu})\varphi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & 0\leqq t\leqq \nu \\ 0, & \nu<t<\infty. \end{cases}$$

Для всех вещественных ν оператор $U_\nu \in \hat{\mathfrak{A}}$ и его символом очевидно, является функция $\exp(i\nu\lambda)$.

Через $V^{(n)}(n=0, \pm 1,\ldots)$ обозначим оператор из $\hat{\mathfrak{A}}$, символ которого равен $(\lambda-i)^n/(\lambda+i)^n$. Без труда проверяется (см. [4]), что $V^{(n)}=V^n(n=0, 1,\ldots)$ и $V^{(n)}= =(V^{(-1)})^{-n}(n=-1, -2, \ldots)$, а операторы V и $V^{(n-)}$ определяются равенствами

$$(V\varphi)(t) = \varphi(t)-2\int_0^t e^{s-t}\varphi(s)\,ds, \quad (V^{(-1)}\varphi)(t) = \varphi(t)-2\int_t^\infty e^{t-s}\varphi(s)\,ds.$$

Как известно (см. например, [4]), для всех натуральных n оператор $V^{(n)}$ обратим слева: $V^{(-n)}V^{(n)}=I$. Подпространство $\mathfrak{E}_{p,n}$ значений оператора $V^{(n)}$ $(n>0)$ совпадает с линейной замкнутой в пространстве $L_p(0, \infty)$ оболочкой функций $\Lambda(2t)e^{-t}$ $(j=n, n+1, \ldots)$ где $\Lambda_j(t)$ — полиномы Лагера, а подпространство $\mathfrak{F}_n$ нулей оператора $V^{(-n)}$ $(n>0)$ является линейной оболочкой функций t^je^{-t} $(j=0, 1, \ldots, n-1)$ и не зависит от p. Легко видеть, что уравнение $V^{(n)}\varphi=g(n>0)$ разрешимо в $L_p(0, \infty)$ в том и только том случае, когда выполняются условия

$$\int_0^\infty g(t)t^je^{-t}\,dt = 0 \qquad (j = 0, 1, \cdots, n-1).$$

Разность $P_n = I - V^{(n)}V^{(-n)}$ $(n>0)$ является проектором, проектирующим пространство $L_p(0, \infty)$ на подпространство $\mathfrak{F}_n$ параллельно $\mathfrak{E}_{p,n}$. В пространстве L_2 $(0, \infty)$ проектор P_n $(n=1, 2, \ldots)$ ортогонален.

Для всех $\nu(0\leqq \nu<\infty)$ и n $(n=0, 1, \ldots)$ операторы $U_\nu V^{(n)}(=V^{(n)}U_\nu)$, $U_{-\nu}V^{(-n)}$ $(=V^{(-n)}U_{-\nu})$, $U_{-\nu}V^{(n)}$, $V^{(-n)}U_\nu$ принадлежат*) множеству $\hat{\mathfrak{A}}$. Очевидно, символами этих простейших интегрально-разностных операторов являются соответственно функции

$$e^{i\nu\lambda}\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^n, \quad e^{-i\nu\lambda}\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{-n}, \quad e^{-i\nu\lambda}\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^n, \quad e^{i\nu\lambda}\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{-n}.$$

*) Отметим, что операторы $U_\nu V^{(-n)}$ и $V^{(n)}U_{-\nu}$ не принадлежат множеству $\hat{\mathfrak{A}}$.

Пусть символ $\mathscr{W}(\lambda)$ оператора $W \in \hat{\mathfrak{A}}$ является невырожденным и равенство (1. 4) дает факторизацию функции $\mathscr{W}(\lambda)$. Тогда, в силу сказанного в конце ервого пункта, оператор W можно представить в виде

$$W = W_- U_\nu V^{(n)} W_+ \tag{2. 2}$$

при $\nu \leqq 0$, и в виде

$$W = W_- V^{(n)} U_\nu W_+ \tag{2. 3}$$

ри $\nu \geqq 0$, где $W_\pm$ — операторы из $\hat{\mathfrak{A}}_\pm$ с символами, соответственно равными $\mathscr{W}_\pm(\lambda)$; $\nu = \nu(\mathscr{W})$, $n = n(\mathscr{W})$.

Так как операторы $W_\pm$ обратимы и обратными к ним являются операторы $W_\pm^{-1} \in \hat{\mathfrak{A}}_\pm$ с символами $\mathscr{W}_\pm^{-1}(\lambda)$, то вопрос о характере обратимости оператора W сводится к исследованию одного из простейших операторов $U_\nu V^{(n)}$ при $\nu \leqq 0$ и $V^{(n)} U_\nu$ при $\nu > 0$.

3. *Случай* $\nu > 0$. В этом пункте и в последующих двух предполагается ледующее: $W(\in \hat{\mathfrak{A}})$ — оператор с невырожденным символом $\mathscr{W}(\lambda)$, равенство 1. 4) дает факторизацию символа $\mathscr{W}(\lambda)$, $W_\pm$ — операторы из $\hat{\mathfrak{A}}_\pm$ с символами $\mathscr{W}_\pm(\lambda)$, числа $\nu(\mathscr{W})$ и $n(\mathscr{W})$ для краткости обозначим через ν и n.

Теорема 2. 1. *Если $\nu > 0$, то оператор W обратим слева. Для того чтобы уравнение*

$$W\varphi = g \tag{2. 4}$$

было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы

а) *при $n \geqq 0$ функция $W_-^{-1} g$ обращалась в нуль на отрезке* $[0, \nu]$ *и выполнялось словие*

$$\int_0^\infty (W_-^{-1} g)(t) t^k e^{-t}\, dt = 0 \qquad (k = 0, 1, \cdots, n-1), \tag{2. 5}$$

б) *при $n < 0$ функция $V^{(-n)} W_-^{-1} g$ совпадала на отрезке* $[0, \nu]$ *с некоторой линейной комбинацией функций $t^j e^{-t}$* $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$..

Доказательство. Как уже отмечалось в предыдущем пункте, исследование обратимости оператора W сводится к исследованию оператора $V^{(n)} U_\nu$. Если $n \geqq 0$, то оператор $U_{-\nu} V^{(-n)} (\in \hat{\mathfrak{A}})$ является обратным слева к оператору $V^{(n)} U_\nu$. При $n < 0$ и $\nu > 0$ будем иметь

$$U_{-\nu} V^{(-n)} V^{(n)} U_\nu = I - U_{-\nu} P_{-n} U_\nu, \tag{2. 6}$$

где $P_m = I - V^{(m)} V^{(-m)}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ — конечномерный проектор, проектирующий пространство L_p на подпространство с базисом $t^j e^{-t}$ $(j = 0, 1, \ldots, m-1)$ (см. п. 2.). В пространстве L_2 оператор P_m является ортогональным проектором.

Так как множества значений операторов U_ν и P_{-n} пересекаются только в нуле, то в случае пространства L_2 оператор $U_{-\nu}P_{-n}U_\nu$ имеет норму, меньшую единицы, и следовательно, оператор $I-U_{-\nu}P_{-n}U_\nu$ обратим, причем

$$(I-U_{-\nu}P_{-n}U_\nu)^{-1}=\sum_{j=0}^{\infty}(U_{-\nu}P_{-n}U_\nu)^j. \tag{2.7}$$

Так как оператор $I-U_{-\nu}P_{-n}U_\nu$ в любом пространстве L_p $(1\leqq p\leqq\infty)$ может аннулировать лишь линейные комбинации функций t^je^{-t} $(j=0, 1, \dots, -n-1)$, которые принадлежат L_2, то он действует взаимно однозначно во всех пространствах L_p. В силу конечномерности проектора P_{-n} оператор $I-U_{-\nu}P_{-n}U_\nu$ обратим во всех пространствах L_p. Легко видеть что ряд в правой части равенства (2. 7) сходится по норме в любом пространстве L_p и стало быть, равенство (2. 7) сохраняет силу во всех пространствах L_p $(1\leqq p\leqq\infty)$.

Учитывая равенство (2. 6), получим что оператор $V^{(n)}U_\nu$ обратим только слева и обратный слева к нему имеет вид

$$(I-U_{-\nu}P_{-n}U_\nu)^{-1}U_{-\nu}V^{(-n)}.$$

Перейдем теперь к нахождению условий разрешимости уравнения (2. 4), которое может быть записано в виде

$$V^{(n)}U_\nu W_+\varphi=W_-^{-1}g. \tag{2.8}$$

При $n\geqq 0$ операторы $V^{(n)}$ и U_ν коммутируют. Поэтому в этом случае для разрешимости уравнения (2. 8), необходимо чтобы функция $W_-^{-1}g$ принадлежала пересечению множеств значений операторов $V^{(n)}$ и U_ν. Последнее эквивалентно выполнению условий *a)*.

Пусть обратно функция $W_-^{-1}g$ принадлежит множествам значений операторов $V^{(n)}$ и U_ν и $\psi=U_{-\nu}\,W_-^{-1}g$ — единственное решение уравнения $U_\nu\psi=W_-^{-1}g$. Покажем, что функция $\psi(t)$ принадлежит множеству значений оператора $V^{(n)}$. Действительно, обозначая функцию $(W_-^{-1}g)(t)$ через $\chi(t)$, получим

$$\int_0^\infty\psi(t)t^je^{-t}\,dt=\int_0^\infty(U_{-\nu}\chi)(t)t^je^{-t}\,dt=$$

$$=\int_0^\infty\chi(t+\nu)t^je^{-t}\,dt=\int_\nu^\infty\chi(t)(t-\nu)^je^{-t+\nu}\,dt=$$

$$=\int_0^\infty\chi(t)(t-\nu)^je^{-t+\nu}\,dt=0\qquad(j=0, 1, \cdots, n-1).$$

Таким образом, уравнение $U_\nu V^{(n)}\varphi=W_-^{-1}g$ разрешимо, а следовательно разрешимо и уравнение (2. 8).

Пусть теперь $n<0$. Если функция $\varphi \in L_p(0, \infty)$ является решением уравнение (2. 8), то

(2. 9) $$U_\nu W_+ \varphi = V^{(-n)} W_-^{-1} g - f,$$

где

$$f = (V^{(-n)} V^{(n)} - I) U_\nu W_+ \varphi.$$

Легко видеть, что функция $f(t)$ имеет вид

(2. 10) $$f(t) = \sum_{j=0}^{-n-1} c_j t^j e^{-t},$$

где коэффициенты c_j таковы, что

(2. 11) $$(V^{(-n)} W_-^{-1} g)(t) = f(t) \qquad (0 \leq t \leq \nu).$$

Обратно, пусть условие *б)* выполнено, и числа c_j подобраны так чтобы для функции (2. 10) выполнялось (2. 11). Тогда уравнение (2. 9) разрешимо и его решение, очевидно, является и решением уравнения (2. 8).

Теорема доказана.

В рассматриваемом в этом пункте случае $\nu > 0$, оператор W допускает представление

$$W = W_- V^{(n)} U_\nu W_+$$

Оператор $W^{(-1)}$, обратный к W слева, задается формулой

$$W^{(-1)} = W_+^{-1} V^{(-n)} U_{-\nu} W_-^{-1} \text{ при } n \geq 0$$

и формулой

$$W^{(-1)} = W_+^{-1} (I - U_{-\nu} P_{-n} U_\nu)^{-1} U_{-\nu} V^{(-n)} W_-^{-1} \quad \text{при} \quad n<0.$$

Оператор $(I - U_{-\nu} P_{-n} U_\nu)^{-1}$ может быть получен по формуле

$$(I - U_{-\nu} P_{-n} U_\nu)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (U_{-\nu} P_{-n} U_\nu)^j,$$

где ряд сходится по норме операторов*).

4. *Случай* $\nu < 0$.

Теорема 2. 2. *Если* $\nu < 0$, *то оператор* W *обратим справа. Всякое решение* $\varphi(t) \in L_p(0, \infty)$ *однородного уравнения*

(2. 12) $$W\varphi = 0$$

а) *при* $n \geq 0$ *имеет вид*

(2. 13) $$\varphi = W_+^{-1} V^{(-n)} g,$$

---

*) Оператор $(I - U_{-\nu} P_{-n} U_\nu)^{-1}$ можно также найти как оператор, обратный к оператору Фредгольма с вырожденным ядром.

где $g(t)$ — *произвольная функция из* $L_p(0, \infty)$, *удовлетворяющая условиям*

$$(2.14)\qquad g(t)=0 \quad (t>-\nu); \quad \int_0^\infty g(t)t^j e^{-t}\,dt = 0 \qquad (j=0, 1, \cdots, n-1)$$

б) *при* $n<0$ *имеет вид*

$$\varphi = W_+^{-1}\left(g(t)+\sum_{j=0}^{-n-1} c_j t^j e^{-t}\right),$$

где $g(t)$ — *произвольная функция из* L_p $(0, \infty)$, *равная нулю при* $-\nu \leqq t < \infty$, *а* c_j — *произвольные комплексные числа.*

Доказательство. Пользуясь соображениями из доказательства предыдущей теоремы легко вывести, что оператор $W^{(-1)}$, определенный равенством

$$W^{(-1)} = W_+^{-1}V^{(-n)}U_{-\nu}W_-^{-1} \quad \text{при} \quad n \leqq 0$$

и равенством

$$W^{(-1)} = W_+^{-1}V^{(-n)}U_{-\nu}(I-U_\nu P_n U_{-\nu})^{-1}W_-^{-1} \quad \text{при} \quad n>0,$$

является обратным справа к оператору W.

Уравнение (2. 12) эквивалентно следующему

$$(2.15)\qquad U_\nu V^{(n)} W_+ \varphi = 0.$$

В случае $n \geqq 0$, очевидно, что всякая функция вида (2. 13) является решением уравнения (2. 15). Обратно, пусть $\varphi(t)$ — решение уравнения (2. 15). Тогда функция $g = V^{(n)} W_+ \varphi$ удовлетворяет условиям (2. 14) и φ выражается через неё равенством $\varphi = W_+^{-1} V^{(-n)} g$.

В случае $n<0$ операторы U_ν и $V^{(n)}$ коммутируют и поэтому всякая функция вида $\varphi = W_+^{-1}\psi$, где ψ принадлежит прямой сумме подпространства нулей U_ν и $V^{(n)}$, является решением уравнения (2. 15).

Пусть $\varphi(t)$ — решение уравнения (2. 15). Тогда функция $\psi = U_\nu W_+ \varphi$ является линейной комбинацией функций $t^j e^{-t}$ $(j=0, 1, \ldots, n-1)$ и, следовательно, $W_+\varphi = U_{-\nu}\psi + b(t)$, где $b(t)=0$, при $t>-\nu$. Кроме того, легко видеть, что функция $U_{-\nu}\psi$ представима в виде суммы двух функций, одна из которых есть линейная комбинация функций $t^j e^{-t}$, а вторая равна нулю при $t>-\nu$ Этим завершается доказательство теоремы.

5. *Случай* $\nu=0$. Приводимая ниже теорема является обобщением известных результатов М. Г. Крейна (см. [2]) об уравнениях Винера—Хопфа.

Теорема 2. 3. *Если* $\nu=0$, *то*

а) *при* $n=0$ *оператор* W *обратим, причем* $W^{-1} = W_+^{-1} W_-^{-1}$;

б) *при* $n>0$ *оператор* $W^{(-1)} = W_+^{-1} V^{(-n)} W_-^{-1}$ *является обратным слева к оператору* W; *уравнение* (2. 4) *разрешимо в том и только в том случае, когда выполнено условие* (2. 5);

в) *при* $n<0$ *оператор* $W^{(-1)}=W_{+}^{-1}V^{(-n)}W_{-}^{-1}$ *является обратным справа к оператору* W; *общее решение однородного уравнения* (2. 12) *дается равенством*

$$\varphi = W_{+}^{-1}\left(\sum_{j=0}^{-n-1} c_j t^j e^{-t}\right),$$

где c_j — *произвольные комплексные числа.*

Доказательства предыдущих теорем по существу остаются в силе и для рассматриваемого здесь случая.

6. *Необходимость условия невырождения.*

Теорема 2.4. *Для того чтобы оператор* $W\in\hat{\mathfrak{A}}$ *был обратим в пространстве* $L_p(0,\infty)$ $(1\leqq p\leqq\infty)$ *хотя бы с одной стороны, необходимо и достаточно, чтобы его символ* $\mathcal{W}(\lambda)$ *был невырожденным.*

Если символ $\mathcal{W}(\lambda)$ *вырождается, то оператор* W *не является ни* Φ_{+}*- ни* Φ_{-}*-оператором*).*

Доказательство. Достаточность условий теоремы уже была установлена в предыдущих теоремах.

Пусть символ $\mathcal{W}(\lambda)$ оператора $W(\in\hat{\mathfrak{A}})$ вырождается. Легко видеть, что в любой окрестности оператора W найдется оператор $W_1\in\hat{\mathfrak{A}}$, символ которого имеет вид $\mathcal{W}_1(\lambda)=a_1(\lambda)+\mathcal{K}_1(\lambda)$, где $a_1(\lambda)$ $(\in\mathfrak{P})$ — почти-периодический полином

$$a_1(\lambda)=\sum_{j=1}^{m} c_j e^{i\gamma_j\lambda},$$

$\mathcal{K}_1(\lambda)$ $(\in\mathfrak{L}_0)$ — рациональная функция, причем в некоторой точке λ_0 вещественной оси $\mathcal{W}_1(\lambda_0)=0$.

Рассмотрим функцию

$$\mathcal{W}_2^{\pm}(\lambda)=\mathcal{W}_1(\lambda)\frac{\lambda\pm i}{\lambda-\lambda_0}. \tag{2.16}$$

Её можно представить в виде

$$\mathcal{W}_2^{\pm}(\lambda)=\mathcal{W}_1(\lambda)+(\lambda_0\pm i)\left(\frac{a_1(\lambda)-a_1(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}+\frac{\mathcal{K}_1(\lambda)-\mathcal{K}_1(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}\right).$$

---

*) Линейный ограниченный оператор А, действующий в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$ называется Φ_{+}-(Φ_{-}-) оператором, если множество его значений замкнуто и подпространство решений уравнения $Ax=0$ $(A^*f=0;\, f\in\mathfrak{B}^*)$ конечномерно.

Функция $(\mathscr{K}_1(\lambda)-\mathscr{K}_1(\lambda_0))/(\lambda-\lambda_0)$ принадлежит $\mathfrak{L}_0$, а функция $(a_1(\lambda)-a_1(\lambda_0))/(\lambda-\lambda_0)$ является линейной комбинацией функций вида

$$\frac{e^{i\gamma\lambda}-e^{i\gamma\lambda_0}}{\lambda-\lambda_0}=i\int\limits_0^\gamma e^{i\lambda_0(\gamma-t)}e^{i\lambda t}\,dt,$$

которые, очевидно, также принадлежат $\mathfrak{L}_0$. Таким образом, $\mathscr{W}_2(\lambda)\in\mathfrak{A}$. Так как $(\lambda-\lambda_0)/(\lambda\pm i)\in\mathfrak{A}_\pm$, то из равенства (2. 16) вытекает, что оператор W_1 представим в виде

$$W_1=B_-W_2^-,\quad W_1=W_2^+B_+, \tag{2.17}$$

где $W_2^\pm$ и $B_\pm$ операторы из $\hat{\mathfrak{A}}$ с символами, равными соответственно $\mathscr{W}_2^\pm(\lambda)$ и $(\lambda-\lambda_0)/(\lambda\pm i)$.

Допустим, что оператор W обратим с какой-либо стороны, тогда с той же стороны обратим оператор W_1. Отсюда в силу равенства (2. 17) вытекает, что по крайней мере один из операторов B_+, B_- обратим с какой-либо стороны, а последнее противоречит установленному в [4].

Аналогично, если допустить, что оператор W является Φ_+- или Φ_--оператором, то получим (см. [5] стр. 90), что таковым является оператор W_1. Из равенств (2. 17) в силу одного предложения из [6] следует, что один из операторов B_+ или B_- является Φ_+- или Φ_--оператором. Последнее невозможно (см. [7]).

Теорема доказана.

§ 3. Интегрально-разностные операторы с непрерывными символами

В этом параграфе результаты предыдущего параграфа распостраняются на более широкий (в некотором смысле максимальный) класс интегрально-разностных операторов Винера—Хопфа.

1. *Оценка нормы интегрально-разностных операторов.* Как уже отмечалось в § 2, для любого оператора $W\in\hat{\mathfrak{A}}$, действующего в пространстве $L_p(0,\infty)$ $(1\leqq p\leqq\infty)$ по правилу

$$(W\varphi)(t)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_j\varphi(t-\delta_j)+\int\limits_0^\infty k(t-s)\varphi(s)\,ds, \tag{3.1}$$

имеет место оценка

$$\|W\|_p\leqq\sum_{j=-\infty}^{\infty}|a_j|+\int\limits_{-\infty}^{\infty}|k(t)|\,dt,$$

где через $\|W\|_p$ обозначается норма оператора W в пространстве L_p $(0,\infty)$.

Лемма 3. 1. *Пусть оператор W из $\hat{\mathfrak{A}}$ имеет вид* (3. 1) *и* $\mathscr{W}(\lambda) \in \mathfrak{A}$ — *его символ. Тогда имеет место оценка*

$$\sup_{-\infty<\lambda<\infty} |\mathscr{W}(\lambda)| \leqq \|W\|_p \qquad (1 \leqq p \leqq \infty), \tag{3. 2}$$

причем

$$\|W\|_1 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| + \int_{-\infty}^{\infty} |k(t)|\,dt, \quad \|W\|_2 = \sup_{-\infty<\lambda<\infty} |\mathscr{W}(\lambda)|. \tag{3. 3}$$

Для спектрального радиуса r_w оператора W в любом пространстве $L_p(0, \infty)$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$ имеет место равенство

$$r_w = \sup_{-\infty<\lambda<\infty} |\mathscr{W}(\lambda)|. \tag{3. 4}$$

Доказательство. Пусть ε — произвольное положительное число. Подберем вещественное число λ_0 так чтобы

$$|\mathscr{W}(\lambda_0)| > \sup_{-\infty<\lambda<\infty} |\mathscr{W}(\lambda)| - \varepsilon.$$

Так как символ оператора $W - \mathscr{W}(\lambda_0)I$ обращается в нуль в точке λ_0, то в силу теоремы 2. 4 этот оператор необратим в $L_p\,(0, \infty)$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$. Следовательно,

$$r_w \geqq |\mathscr{W}(\lambda_0)|.$$

Учитывая произвольность ε получаем

$$(\|W\|_p \geqq)\, r_w \geqq \sup_{-\infty<\lambda<\infty} |\mathscr{W}(\lambda)|. \tag{3. 5}$$

Для всех чисел μ, удовлетворяющих условию $\mu > \sup |\mathscr{W}(\lambda)|$ оператор $W - \mu I$ обратим. Действительно, в рассматриваемом случае будем иметь

$$\inf_{-\infty<\lambda<\infty} |\mathscr{W}(\lambda) - \mu| > 0$$

и

$$\sup_{-\infty<\lambda<\infty} |a(\lambda)| \leqq \sup_{-\infty<\lambda<\infty} |\mathscr{W}(\lambda)| < |\mu|.$$

Из последнего соотношения вытекает, что $\nu(\mathscr{W}(\lambda) - \mu) = \nu(a(\lambda) - \mu) = 0$. Так как целое число

$$n(\mathscr{W}(\lambda) - \mu) = \frac{1}{2\pi}\left[\arg\left(1 + (a(\lambda) - \mu)^{-1}\mathscr{K}(\lambda)\right)\right]_{-\infty}^{\infty}$$

непрерывно зависит от μ и при больших значениях μ оно равно нулю, то и для всех рассматриваемых μ оно равно нулю. В силу теоремы 2. 3 оператор $W - \mu I$ обратим. Таким образом, $r_w \leqq \sup |\mathscr{W}(\lambda)|$. Вместе с соотношением (3. 5) это означает равенство (3. 4).

Рассмотрим оператор $\tilde{W}$, определенный в пространстве $L_2\ (-\infty, \infty)$ равенством

$$(\tilde{W}\varphi)(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varphi(t-\delta_j) + \int_{-\infty}^{\infty} k(t-s)\varphi(s)\,ds \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Легко видеть, что

$$\|\tilde{W}\|_2 = \sup_{-\infty<\lambda<\infty} |\mathscr{W}(\lambda)|.$$

Так как

$$\|W\|_2 = \|P\tilde{W}P\|_2,$$

где P — ортопроектор, действующий в $L_2\ (-\infty, \infty)$ по правилу

$$(P\varphi)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t>0 \\ 0, & t<0, \end{cases}$$

то

$$\|W\|_2 \leqq \|\tilde{W}\|_2.$$

Таким образом, доказано второе из равенств (3. 3). Первое из равенств (3. 3) получается из легко доказываемого соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \|W\varphi_n\|_1 \geqq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| + \int_{-\infty}^{\infty} |k(t)|\,dt,$$

где

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} n, & 0 \leqq t \leqq 1/n \\ 0, & 1/n < t < \infty \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

Лемма доказана.

Лемма 3. 2. *Пусть W_1, $W_2 (\in \hat{\mathfrak{A}})$ — операторы с символами $\mathscr{W}_1(\lambda)$, $\mathscr{W}_2(\lambda)$ и $W (\in \hat{\mathfrak{A}})$ — оператор с символом $\mathscr{W}(\lambda) = \mathscr{W}_1(\lambda)\,\mathscr{W}_2(\lambda)$. Тогда*

$$\|W\|_p \leqq \|W_1\|_p \|W_2\|_p \qquad (1 \leqq p \leqq \infty). \tag{3. 6}$$

Доказательство. Очевидно, без ограничения общности можно считать, что операторы W_1 и W_2 имеют вид

$$(W_m\varphi)(t) = \sum_{j=1}^{l} a_j^{(m)} \varphi(t-\delta_j^{(m)}) + \int_0^{\infty} k_m(t-s)\varphi(s)\,ds \qquad (m = 1, 2),$$

где $k_m(t)$ — финитные функции из $L_1\ (-\infty, \infty)$. В этом предположении, легко доказывается, что при достаточно большом δ будет иеть место равенство

$$W = U_{-\delta} W_1 W_2 U_\delta,$$

откуда вытекает соотношение (3. 6).

Лемма 3. 3. *Пусть оператор $W \in \hat{\mathfrak{A}}$ представлен в виде*

$$(W\varphi)(t) = \int_0^\infty \varphi(s)\, d\omega(t-s),$$

где $\omega(t)$ — функция ограниченной вариации без сингулярной компоненты. Тогда в любом пространстве $L_p(0, \infty)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ сопряженный оператор W^* имеет вид

$$(W^*\varphi)(t) = \int_0^\infty \varphi(s)\, \overline{d\omega(s-t)}$$

и

$$\|W\|_p = \|W^*\|_p. \tag{3.7}$$

Доказательство. Первое утверждение леммы проверяется без труда. Для доказательства второго утверждения введем операторы

$$(S_\tau\varphi)(t) = \begin{cases} \varphi(\tau-t), & 0<t<\tau \\ \varphi(t), & \tau<t<\infty \end{cases}; \quad (P_\tau\varphi)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & 0<t<\tau \\ 0, & \tau<t<\infty \end{cases} \quad (0<\tau<\infty).$$

Оператор S_τ обратим, изометричен и $S_\tau^{-1} = S_\tau$, а P_τ является проектором с единичной нормой.

Непосредственно проверяется следующее равенство

$$P_\tau W' P_\tau = S_\tau P_\tau W P_\tau S_\tau, \tag{3.8}$$

где W' — оператор, транспонированный к W, т. е.

$$(W'\varphi)(t) = \int_0^\infty \varphi(s)\, d\omega(s-t).$$

Так как $\overline{W'\varphi(t)} = (W^*\bar{\varphi})(t)$, то

$$\|P_\tau W' P_\tau\|_p = \|P_\tau W^* P_\tau\|_p. \tag{3.9}$$

Из равенств (3. 8) и (3. 9) следует равенство

$$\|P_\tau W^* P_\tau\|_p = \|P_\tau W P_\tau\|_p,$$

которое вместе с соотношением

$$\|W\|_p \leq \varliminf_{\tau\to\infty} \|P_\tau W P_\tau\|_p$$

влечет (3. 7).

2. *Операторы с непрерывными символами.* Обозначим через $\hat{\mathfrak{A}}_p$ замыкание по операторной норме в $L_p(0, \infty)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ множества $\hat{\mathfrak{A}}$. Пусть A — произвольный оператор из $\hat{\mathfrak{A}}_p$ и W_n $(n=1, 2, \ldots)$ — последовательность из $\mathfrak{A}$, сходящаяся к оператору A. В силу соотношений (3. 2) и (1. 3) последовательность функций $\mathcal{W}_n(\lambda) = a_n(\lambda) + \mathcal{K}_n(\lambda)$ из $\mathfrak{A}$ такова, что последовательность $a_n(\lambda)$

($n=1, 2, \ldots$) равномерно сходится к некоторой почти-периодической функции $a(\lambda)$, а последовательность $\mathscr{K}_n(\lambda)$ ($n=1, 2, \ldots$) — к некоторой непрерывной функции $\mathscr{K}(\lambda)$, стремящейся к нулю при $\lambda \to \pm\infty$. Легко видеть, что функция $\mathscr{A}(\lambda) = a(\lambda) + \mathscr{K}(\lambda)$ не зависит от выбора последовательности $W_n \in \hat{\mathfrak{A}}$, сходящейся к оператору A. Таким образом, каждому оператору $A \in \hat{\mathfrak{A}}_p$ сопоставляется непрерывная функция $\mathscr{A}(\lambda)$, которую будем называть **символом** оператора A. Легко видеть, что $\hat{\mathfrak{A}}_1 = \hat{\mathfrak{A}}$. Из соотношения (3.2) вытекает, что для любого оператора $A \in \hat{\mathfrak{A}}_p$ имеет место оценка

$$\sup_{-\infty<\lambda<\infty} |\mathscr{A}(\lambda)| \leqq \|A\|_p,$$

а при $p=2$ из (3. 3) вытекает равенство

$$\|A\|_2 = \sup_{-\infty<\lambda<\infty} |\mathscr{A}(\lambda)|. \tag{3.10}$$

Легко видеть, что $\hat{\mathfrak{A}}_{p_1} \subseteqq \hat{\mathfrak{A}}_{p_2}$ при $1 \leqq p_1 \leqq p_2 \leqq 2$ и если $A \in \hat{\mathfrak{A}}_{p_1}$, то $\|A\|_{p_1} \geqq \|A\|_{p_2}$. Из леммы 3. 3 следует, что $\hat{\mathfrak{A}}_p = \hat{\mathfrak{A}}_q$ ($p^{-1} + q^{-1} = 1$) и $\|A\|_p = \|A^*\|_p$ ($A \in \hat{\mathfrak{A}}_p$).

Обозначим через $\mathfrak{A}_p$ множество символов всех операторов из $\hat{\mathfrak{A}}_p$. *Соответствие между операторами из $\hat{\mathfrak{A}}_p$ и их символами из $\mathfrak{A}_p$ звaимно однозначно.* Действительно, допустим, что ненулевому оператору $A \in \hat{\mathfrak{A}}_p$ соответствует символ, равный тождественно нулю. Пусть последовательность $W_n \in \hat{\mathfrak{A}}$ сходится к оператору A по норме L_p. Последовательность W_n в силу (3. 2) и (3. 3) фундаментальна по операторной норме L_2 и, следовательно, сходится по этой норме к некоторому оператору B. На пересечении $L_2 \cap L_p$ операторы A и B совпадают и, следовательно, $B \neq 0$. Оператору B соответствует символ равный тождественно нулю, что противоречит равенству (3. 10).

3. *Максимальные идеалы алгебры* $\mathfrak{A}$.

Теорема 3. 1. *Множество M_{λ_0} всех функций из $\mathfrak{A}$, обращающихся в нуль в точке λ_0 ($-\infty < \lambda < \infty$), образует максимальный идеал алгебры $\mathfrak{A}$. Прямая сумма $M_{\mathfrak{P}} \dotplus \mathfrak{L}_0$, где $M_{\mathfrak{P}}$ — любой максимальный идеал алгебры $\mathfrak{P}$, также образует максимальный идеал алгебры $\mathfrak{A}$. Идеалами указанный двух типов исчерпываются все максимальные идеалы алгебры $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Легко проверяется, что M_{λ_0} и $M_{\mathfrak{P}} + \mathfrak{L}_0$ являются максимальными идеалами алгебры $\mathfrak{A}$. Пусть теперь M — некоторый максимальный идеал алгебры $\mathfrak{A}$ и $M_1 = M \cap \mathfrak{P}$, $M_2 = M \cap \mathfrak{L}$. Легко видеть, что M_1 и M_2 — максимальные идеалы соответственно алгебр $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{L}$ и что $M = M_1 \dotplus M_2$. Если $M_2 = \mathfrak{L}_0$, то идеал M имеет второй из указанных видов.

Пусть $M_2 \neq \mathfrak{L}_0$. Тогда, как известно, M_2 совпадает с множеством всех функций из $\mathfrak{L}$, обращающихся в нуль в некоторой вещественной точке λ_0.

Покажем, что M_1 совпадает с множеством всех функций из $\mathfrak{P}$, обращающихся в нуль в этой же точке λ_0. Допустим, что это не так и пусть $a(\lambda)$ и $\mathscr{K}(\lambda)$ — такие функции из M_1 и $\mathfrak{L}_0$ соответственно, что $a(\lambda_0)\neq 0$ и $\mathscr{K}(\lambda_0)\neq 0$. Функция $a(\lambda)\mathscr{K}(\lambda) \in M\cap\mathfrak{L}_0\subset M_2$, так как M и $\mathfrak{L}_0$ являются идеалами алгебры $\mathfrak{A}$. Но это противоречит тому, что $a(\lambda_0)\mathscr{K}(\lambda_0)\neq 0$.

Если $\mathfrak{B}$ — некоторая банахова алгебра функций, заданных на вещественной оси, то через $M_\lambda(\mathfrak{B})$ $(-\infty<\lambda<\infty)$ обозначим множество всех функций из $\mathfrak{L}$, обращающихся в нуль в точке λ. Через $\mathfrak{M}(\mathfrak{B})$ обозначим бикомпакт максимальных идеалов алгебры $\mathfrak{B}$.

Теорема 3. 2. *Совокупность всех максимальных идеалов* $M_\lambda(\mathfrak{A})$ $(-\infty<\lambda<\infty)$ *плотна в бикомпакте* $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$.

Доказательство. Пусть M_0 — произвольный идеал вида $M_0 = M_{\mathfrak{P}}\dot{+}\mathfrak{L}_0$, где $M_{\mathfrak{P}}$ — некоторый максимальный идеал алгебры $\mathfrak{P}$. Рассмотрим окрестность идеала M_0, состоящую из всех идеалов $M\in\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$, для которых

$$(3.11)\qquad |\mathscr{A}_j(M)-\mathscr{A}_j(M_0)| < \varepsilon \qquad (j = 1, 2, \cdots, n),$$

где $\varepsilon>0$ и $\mathscr{A}_j$ — некоторые элементы из $\mathfrak{A}$:

$$\mathscr{A}_j(\lambda) = a_j(\lambda)+\mathscr{K}_j(\lambda)\ \left(a_j(\lambda)\in\mathfrak{P},\ \mathscr{K}_j(\lambda)\in\mathfrak{L}_0\right).$$

Покажем, что в этой окрестности содержится хотя бы один идеал типа $M_\lambda(\mathfrak{A})$.

Как известно (см. [1]) множество идеалов $M_\lambda(\mathfrak{P})$ $(-\infty<\lambda<\infty)$ плотно в $\mathfrak{M}(\mathfrak{P})$, следовательно, существует точка λ_1, такая, что

$$(3.12)\qquad |a_j(\lambda_1)-a_j(M_{\mathfrak{P}})| < \varepsilon/3 \qquad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

Пусть δ — настолько большое положительное число, что $|\mathscr{K}_j(\lambda)|<\varepsilon/3$ при $\lambda>\delta$. Из свойств почти периодических функций следует существование точки λ_0 с $|\lambda_0|>\delta$ такой, что

$$(3.13)\qquad |a_j(\lambda_0)-a_j(\lambda_1)|<\varepsilon/3 \qquad (j=1, 2, \ldots, n).$$

Идеал $M_{\lambda_0}(\mathfrak{A})$ принадлежит окресности (3.11). В самом деле, $\mathscr{K}_j(M_0)=0$ ибо $\mathscr{K}_j\in\mathfrak{L}_0\subset M_0$, а $\mathscr{K}_j(M_{\lambda_0}(\mathfrak{A}))=\mathscr{K}_j(\lambda_0)$ и $a_j(M_{\lambda_0}(\mathfrak{A}))=a_j(\lambda_0)$. Следовательно,

$$\begin{aligned}|\mathscr{A}_j(M_{\lambda_0}(\mathfrak{A}))-\mathscr{A}_j(M_0)| &= |a_j(\lambda_0)+\mathscr{K}_j(\lambda_0)-a_j(M_0)| \leqq \\ &\leqq |a_j(\lambda_0)-a_j(M_0)|+\varepsilon/3 \qquad (j = 1, 2, \cdots, n).\end{aligned}$$

Учитывая, соотношения (3. 12) и (3. 13) и равенство $a_j(M_0)=a_j(M_{\mathfrak{P}})$ получаем

$$|\mathscr{A}_j(M_{\lambda_0}(\mathfrak{A}))-\mathscr{A}_j(M_0)| < \varepsilon \qquad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

Теорема доказана.

4. *Алгебра $\mathfrak{A}_p$ и её максимальные идеалы.* На линейном множестве функций $\mathfrak{A}_p$ введём норму, полагая

$$\|\mathscr{A}(\lambda)\|_p = \|A\|_p. \tag{3.14}$$

Из леммы 3. 2 следует, что если функции $\mathscr{A}_1(\lambda)$, $\mathscr{A}_2(\lambda) \in \mathfrak{A}_p$, то функция $\mathscr{A}(\lambda) = \mathscr{A}_1(\lambda)\mathscr{A}_2(\lambda)$ также принадлежит $\mathscr{A}_p$, причем

$$\|\mathscr{A}_1(\lambda)\mathscr{A}_2(\lambda)\|_p \leqq \|\mathscr{A}_1(\lambda)\|_p \|\mathscr{A}_2(\lambda)\|_p.$$

Таким образом, $\mathfrak{A}_p$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$ является коммутативной банаховой алгеброй. В силу леммы 3. 3 $\mathfrak{A}_p$ является алгеброй с симметричной инволюцией.

Из соотношений (3. 3) вытекает, что $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}$, а $\mathfrak{A}_2$ представляет собой алгебру всех функций $\mathscr{A}(\lambda)$ вида $\mathscr{A}(\lambda) = a(\lambda) + \mathscr{K}(\lambda)$, где $a(\lambda)$ — любая почти-периодическая функция, а $\mathscr{K}(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ — любая непрерывная функция, обращающаяся в нуль на бесконечности, с нормой

$$\|\mathscr{A}(\lambda)\|_2 = \sup_{-\infty<\lambda<\infty} |\mathscr{A}(\lambda)|.$$

Нам понадобятся два простых предложения о банаховых алгебрах.

1^0. *Пусть $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_2$ — коммутативные банаховы алгебры и $\mathfrak{B}_1$ плотно вложена*) в $\mathfrak{B}_2$. Тогда бикомпакт $\mathfrak{M}(\mathfrak{B}_2)$ гомеоморфен замкнутому подмножеству $\mathfrak{M}(\mathfrak{B}_1)$.*

В самом деле, каждому максимальному идеалу $M_2 \in \mathfrak{M}(\mathfrak{B}_2)$ естественным образом ставится в соответствие максимальный идеал $M_1 \in \mathfrak{M}(\mathfrak{B}_1)$, определенный равенством $M_1 = M_2 \cap \mathfrak{B}_1$. Обозначим через $\mathfrak{N}$ множество максимальных идеалов из $\mathfrak{M}(\mathfrak{B}_1)$ получаемых при таком соответствии, т. е. $\mathfrak{N}$ — множество всех максимальных идеалов из $\mathfrak{M}(\mathfrak{B}_1)$, которые допускают расширение (единственным образом) до максимальных идеалов из $\mathfrak{M}(\mathfrak{B}_2)$.

Покажем, что при этом соответствии отображение $\mathfrak{M}(\mathfrak{B}_2)$ на $\mathfrak{N}$ непрерывно. Пусть идеал $M_0 \in \mathfrak{N}$, $U = \{M \in \mathfrak{N}: |x_j(M) - x_j| (M_0) < \varepsilon;\ x_j \in \mathfrak{B}_1,\ j = 1, 2, \dots, n\}$ — его окрестность, и $\tilde{M}_0 \in \mathfrak{M}(\mathfrak{B}_2)$ — расширение M_0. Тогда окрестность $V = \{\tilde{M} \in \mathfrak{M}(\mathfrak{B}_2): |x_j(\tilde{M}) - x_j(\tilde{M}_0)| < \varepsilon\}$ отображается на U. Таким образом $\mathfrak{N}$ замкнуто и, следовательно, множества $\mathfrak{M}(\mathfrak{B}_2)$ и $\mathfrak{N}$ гомеоморфны.

2^0. *Пусть коммутативные банаховы алгебры $\mathfrak{B}_j$ $(j = 1, 2, 3)$ последовательно плотно вложены: $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2 \subset \mathfrak{B}_3$. Если всякий максимальный идеал алгебры $\mathfrak{B}_1$ расширяется до максимального идеала алгебры $\mathfrak{B}_3$ то это справедливо и для пары $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{B}_3$.*

---

*) Говорят, что алгебра $\mathfrak{B}_1$ плотно вложена в алгебру, $\mathfrak{B}_2$ если $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2$, $\overline{\mathfrak{B}}_1 = \mathfrak{B}_2$ и существует такая константа $c > 0$, что для любого $x \in \mathfrak{B}_1$: $\|x\|_2 \leqq c\|x\|_1$.

Действительно, пусть $M_2 \in \mathfrak{M}(\mathfrak{B}_2)$ и $M_1 = M_2 \cap \mathfrak{B}_1$. Тогда $M_1 \in \mathfrak{M}(\mathfrak{B}_1)$, и, следовательно, идеал M_1 содержится в некотором идеале $M_3 \in \mathfrak{M}(\mathfrak{B}_3)$. Замыкание идеала M_1 по норме $\mathfrak{B}_3$, и тем более по норме $\mathfrak{B}_2$, содержится в M_3. Но замыкание M_1 по норме $\mathfrak{B}_2$ равно M_2 (см. [5], лемма 2. 1).

Теорема 3. 3. *Бикомпакты $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$ и $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_2)$ гомеоморфны. Иными словами, всякий максимальный идеал алгебры $\mathfrak{A}$ расширяется (единственным образом) до максимального идеала алгебры $\mathfrak{A}_2$.*

Доказательство. Действительно, в силу предложения 1^0 бикомпакт $\mathfrak{M}(\mathfrak{A}_2)$ гомеоморфен замкнутому множеству $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$, состоящему из всех максимальных идеалов алгебры $\mathfrak{A}$, которые допускают расширения до максимальных идеалов алгебры $\mathfrak{A}_2$. Все максимальные идеалы $M_\lambda(\mathfrak{A})\,(-\infty < \lambda < \infty)$ очевидно, принадлежат $\mathfrak{N}$. Так как множество всех идеалов $M_\lambda(\mathfrak{A})$ в силу теоремы 3. 2 плотно в $\mathfrak{M}(\mathfrak{A})$, то $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}(\mathfrak{A})$.

Теорема 3. 4. *Пусть M — некоторый максимальный идеал алгебры $\mathfrak{A}_2$. Тогда $\hat{M} = M \cap \mathfrak{A}_p$ является максимальным идеалом алгебры $\mathfrak{A}_p$. Идеалами указанного вида исчерпываются все максимальные идеалы алгебры $\mathfrak{A}_p$.*

Эта теорема является непосредственным следствием предложения 2^0.

Теорема 3. 5. *Для того чтобы элемент $\mathscr{A}(\lambda) \in \mathfrak{A}_p$ был обратим, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\inf_{-\infty<\lambda<\infty} |\mathscr{A}(\lambda)| > 0 \tag{3.15}$$

Необходимость условия (3. 15) очевидна. Покажем его достаточность. Пусть для элемента $\mathscr{A}(\lambda) = a(\lambda) + \mathscr{K}(\lambda) \in \mathfrak{A}_p$ ($a(\lambda)$ — почти-периодическая функция, $\mathscr{K}(\lambda)$ — непрерывная функция, равная нулю на бесконечности) выполнено условие (3. 15), тогда

$$\inf_{-\infty<\lambda<\infty} |a(\lambda)| \geqq \inf_{-\infty<\lambda<\infty} |\mathscr{A}(\lambda)| > 0$$

и, следовательно, элемент $\mathscr{A}(\lambda)$ обратим в алгебре $\mathfrak{A}_2$. В силу теоремы 3. 4 он обратим и в $\mathfrak{A}_p$.

5. *Основная теорема.* Определения индексов $\nu(\mathscr{W})$ и $n(\mathscr{W})$ для невырожденных функций $\mathscr{W}(\lambda) \in \mathfrak{A}$, очевидно, сохраняют смысл для проивольной невырожденной функции $\mathscr{A}(\lambda) \in \mathfrak{A}_2$. При этом индексы $\nu(\mathscr{A})$ и $n(\mathscr{A})$ сохраняют свойство устойчивости, т. е. при малых (по норме алгебры $\mathfrak{A}_2$) возмущениях невырожденной функции $\mathscr{A}(\lambda) \in \mathfrak{A}_2$ её индексы не изменяются.

Отметим еще, что также как в алгебре $\mathfrak{A}$, соответствие между операторами из $\hat{\mathfrak{A}}_p$ и их символами частично мультипликативно в следующем смысле.

Пусть $A_1 \in \hat{\mathfrak{A}}_p$ и $A_\pm$ принадлежит замыканию (по норме $\hat{\mathfrak{A}}_p$) $\hat{\mathfrak{A}}_p \cap \hat{\mathfrak{A}}_\pm$. Тогда оператор $A = A_- A_1 A_+ \in \hat{\mathfrak{A}}_p$ и его символ $\mathscr{A}(\lambda)$ равен произведению $\mathscr{A}_-(\lambda)\mathscr{A}_1(\lambda)\mathscr{A}_+(\lambda)$.

Теорема 3. 6. *Для того чтобы оператор $A \in \hat{\mathfrak{A}}_p$ был обратим в пространстве L_p хотя бы с одной стороны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (3. 15).

Если это условие выполнено, то при $\nu(\mathscr{A}) > 0$ оператор A обратим только слева, при $\nu(\mathscr{A}) < 0$ он обратим только справа, а при $\nu(\mathscr{A}) = 0$ оператор A обратим, обратим только слева, обратим только справа в зависимости от того, будет ли индекс $n(\mathscr{A})$ равным нулю, положительным, отрицательным.

Если условие (3. 15) *не выполнено, то A не является ни Φ_+-ни Φ_--оператором.*

Доказательство. Пусть оператор $A \in \hat{\mathfrak{A}}_p$ и его символ удовлетворяет условию (3. 15). Тогда в силу теоремы 3. 5 функция $\mathscr{A}^{-1}(\lambda) \in \mathfrak{A}_p$. Можно найти такую невырожденную функцию $\mathscr{W}(\lambda) \in \mathfrak{A}$, что функция $\mathscr{A}(\lambda)$ представима в виде

$$\mathscr{A}(\lambda) = \mathscr{W}(\lambda)\left(1 + \mathscr{B}(\lambda)\right), \tag{3.16}$$

где $\mathscr{B}(\lambda) \in \mathfrak{A}_p$ и имеет достаточно малую норму в $\mathfrak{A}_p$. Легко видеть, что имеют место равенства $\nu(\mathscr{W}) = \nu(\mathscr{A})$ и $n(\mathscr{W}) = n(\mathscr{A})$. Согласно теореме 1. 1 функция $\mathscr{W}(\lambda)$ допускает факторизацию

$$\mathscr{W}(\lambda) = \mathscr{W}_-(\lambda) e^{i\nu\lambda} \left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^n \mathscr{W}_+(\lambda) \qquad (-\infty < \lambda < \infty), \tag{3.17}$$

где

$$\mathscr{W}_\pm(\lambda), \quad \mathscr{W}_\pm^{-1}(\lambda) \in \mathfrak{A}_\pm, \quad \nu = \nu(\mathscr{A}), \quad n = n(\mathscr{A}).$$

Из равенств (3. 16) и (3. 17) следует, что оператор A допускает следующее представление в зависимости от знаков индексов ν и n:

1. $A = W_- U_\nu V^{(n)} (I + B) W_+$ при $\nu \leqq 0$, $n \leqq 0$;
2. $A = W_- U_\nu (I + B) V^{(n)} W_+$ при $\nu < 0$, $n > 0$;
3. $A = W_- V^{(n)} (I + B) U_\nu W_+$ при $\nu > 0$, $n < 0$;
4. $A = W_- (I + B) U_\nu V^{(n)} W_+$ при $\nu \geqq 0$, $n \geqq 0$,

где $W_\pm$ и B — операторы с символами $\mathscr{W}_\pm(\lambda)$ и $\mathscr{B}(\lambda)$ соответственно.

Так как $\|B\|_p < 1$, то оператор $I + B$ обратим, и поэтому в первом случае оператор

$$A^{(-1)} = W_+^{-1} (I + B)^{-1} V^{(-n)} U_{-\nu} W_-^{-1}$$

является обратным справа к A, а в последнем случае оператор

$$A^{(-1)} = W_+^{-1} V^{(-n)} U_{-\nu}(I+B)^{-1} W_-^{-1}$$

является обратным слева к A.

В доказательстве теоремы 2. 1 показано, в частности, что оператор $U_\nu V^{(n)}$ $(\nu<0,\ n>0)$ обратим справа, а оператор $V^{(n)}U_\nu$ $(\nu>0,\ n<0)$ обратим слева. Так как операторы $U_\nu B V^{(n)}$ и $V^{(n)}BU_\nu$ имеют достаточно малую норму, то оператор $U_\nu(I+B)\,V^{(n)} = U_\nu V^{(n)} + U_\nu B V^{(n)}$, при $\nu<0$ и $n>0$, обратим справа, а оператор $V^{(n)}(I+B)U_\nu = V^{(n)}U_\nu + V^{(n)}BU_\nu$ при $\nu>0$, и $n<0$ обратим слева. Отсюда уже непосредственно вытекает, что в случае 2) оператор A обратим справа, а в случае 3) он обратим слева.

С помощью соображений из доказательства теоремы 2. 1 легко вывести, что при $\nu<0$

$$\dim \ker A = \infty,$$

при $\nu>0$

$$\dim \operatorname{coker} A = \infty,$$

и при $\nu=0$

$$\dim \ker A = -n, \qquad \text{если } n<0$$

и

$$\dim \operatorname{coker} A = n, \qquad \text{если } n>0.$$

Последнее утверждение теоремы доказывается также как соответствующее предложение в теореме 2. 4.

Теорема доказана.

§ 4. Парные интегрально-разностные уравнения и транспонированные к ним

В настоящем параграфе рассматриваются следующие два типа уравнений:

$$(4.1)\qquad \begin{aligned} &\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j^{(1)}\varphi(t-\alpha_j) + \int_{-\infty}^{\infty} k_1(t-s)\varphi(s)\,ds = f(t) \qquad (0<t<\infty),\\ &\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j^{(2)}\varphi(t-\beta_j) + \int_{-\infty}^{\infty} k_2(t-s)\varphi(s)\,ds = f(t) \qquad (-\infty<t<0) \end{aligned}$$

и

$$(4.2)\qquad \begin{aligned} &\sum_{\alpha_j<t} a_j^{(1)}\varphi(t-\alpha_j) + \sum_{\beta_j>t} a_j^{(2)}\varphi(t-\beta_j) +\\ &+\int_0^{\infty} k_1(t-s)\varphi(s)\,ds + \int_{-\infty}^{0} k_2(t-s)\varphi(s)\,ds = f(t) \qquad (-\infty<t<\infty). \end{aligned}$$

Эти уравнения будут рассмотрены в пространстве $L_p\,(-\infty,\infty)$ $(1\leqq p\leqq\infty)$ для случая, когда соответствующие символы $\mathscr{W}_1(\lambda) = a^{(1)}(\lambda)+\mathscr{K}_1(\lambda)$ и $W_2(\lambda) =$

$= a^{(2)}(\lambda) + \mathcal{K}_2(\lambda)$ принадлежат алгебре $\mathfrak{A}$, а также, по аналогии с § 3, в более общем случае. Если $\mathcal{W}_1(\lambda)$ и $\mathcal{W}_2(\lambda) \in \mathfrak{A}$, то уравнения (4. 1) и (4. 2) могут быть переписаны в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)\, d\omega_1(t-s) = f(t) \qquad (0 < t < \infty), \tag{4. 3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)\, d\omega_2(t-s) = f(t) \qquad (-\infty < t < 0)$$

и

$$\int_{0}^{\infty} \varphi(s)\, d\omega_1(t-s) + \int_{-\infty}^{0} \varphi(s)\, d\omega_2(t-s) = f(t) \qquad (-\infty < t < \infty), \tag{4. 4}$$

где $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ — функции ограниченной вариации без сингулярной компоненты.

1. *Алгебра операторов* $\tilde{\mathfrak{A}}_p$. Обозначим через $\tilde{\mathfrak{A}}(=\tilde{\mathfrak{A}}_1)$ множество всех операторов $\tilde{W}$, действующих в $L_p\ (-\infty, \infty)$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$ по формуле

$$(\tilde{W}\varphi)(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varphi(t-\delta_j) + \int_{-\infty}^{\infty} k(t-s)\varphi(s)\, ds, \tag{4. 5}$$

где

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| < \infty \quad \text{и} \quad k(t) \in L_1(-\infty, \infty).$$

Очевидно,

$$\|\tilde{W}\|_p \leqq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| + \int_{-\infty}^{\infty} |k(t)|\, dt. \tag{4. 6}$$

Также как для операторов из $\hat{\mathfrak{A}}$ доказывается, что в случае $p=1$ в (4. 6) достигается знак равенства.

Множество $\tilde{\mathfrak{A}}$ (в отличие от $\hat{\mathfrak{A}}$) является банаховой коммутативный алгеброй с нормой $\|\tilde{W}\|_1$.

Аналогично предыдущим параграфам, через $\tilde{\mathfrak{A}}_p$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$ обозначим замыкание (по норме пространства $L_p\ (-\infty, \infty)$) алгебры $\tilde{\mathfrak{A}}$.

Лемма 4. 1. *Для любого оператора* $\tilde{W} \in \tilde{\mathfrak{A}}$ *имеет место равенство*

$$\|\tilde{W}\|_p = \|W\|_p,$$

где через W *обозначен соответствующий оператор из* $\hat{\mathfrak{A}}$.

Доказательство. В самом деле, легко видеть, что

$$\|W\|_p \leqq \|\tilde{W}\|_p \qquad (1 \leqq p \leqq \infty).$$

Обратное неравенство докажем для случая, когда только конечное число чисел a_j (из равенства (4. 5), определяющего оператор $\tilde{W}$) отличны от нуля, а ядро $k(t)$ — финитно (т. е. обращается в нуль вне некоторого конечного промежутка). Очевидно, это предположение не уменьшает общности рассуждений.

Через $\varphi_n(t)$ $(n=1, 2, \ldots)$ обозначим последовательность финитных функций из пространства $L_p\,(-\infty, \infty)$ $(\|\varphi_n\|_p=1)$, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{W}\varphi_n\|_p = \|\tilde{W}\|_p.$$

Подберем положительные числа ν_n $(n=1, 2, \ldots)$ настолько большими, чтобы функции $\psi_n(t) = \varphi_n(t-\nu_n)$ обращались в нуль на отрицательной полуоси и имело место равенство

$$(\tilde{W}\psi_n)(t) = \begin{cases} (W\psi_n)(t), & t\geqq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}.$$

Обозначим через χ_n функции $\tilde{W}\psi_n$ $(n=1, 2, \ldots)$. Тогда будем иметь

$$\chi_n(t+\nu_n) = (\tilde{W}\varphi_n)(t)$$

и, следовательно,

$$\|\chi_n(t)\|_p = \|\tilde{W}\varphi_n\|_p,$$

откуда вытекает

$$\lim_{n\to\infty} \|\chi_n(t)\|_p = \|\tilde{W}\|_p.$$

С другой стороны,

$$\|\chi_n\|_p = \|\tilde{W}\psi_n\|_p = \|W\psi_n\|_p.$$

Стало быть,

$$\lim_{n\to\infty} \|W\psi_n\|_p = \|\tilde{W}\|_p.$$

Учитывая, что $\|\psi_n\|_p=1$, получаем

$$\|W\|_p \geqq \|\tilde{W}\|_p,$$

чем и завершается доказательство леммы.

Из доказанной леммы вытекает, что банаховы пространства $\tilde{\mathfrak{A}}_p$ и $\tilde{\mathfrak{A}}_p$ изоморфны и изометричны. Отсюда также вытекает изоморфизм и изометрия коммутативных банаховых алгебр $\tilde{\mathfrak{A}}_p$ и $\mathfrak{A}_p$. Этот изоморфизм сопоставляет каждому оператору $A\in\tilde{\mathfrak{A}}_p$ функцию $\mathscr{A}(\lambda)\in\mathfrak{A}_p$, которую естественно назвать **символом** оператора A.

Обозначим через $\tilde{\mathfrak{A}}_+(\tilde{\mathfrak{A}}_-)$ подалгебру алгебры $\tilde{\mathfrak{A}}$, состоящую из всех операторов $\tilde{W}_+$ $(\tilde{W}_-\in\tilde{\mathfrak{A}})$ с символами $\mathscr{W}_+(\lambda)$ из $\mathfrak{A}_+(\mathscr{W}_-(\lambda)$ из $\mathfrak{A}_-)$. Через $\tilde{\mathfrak{A}}_p^+$ $(\tilde{\mathfrak{A}}_p^-)$ обозначим подалгебру $\tilde{\mathfrak{A}}_p$, являющуюся замыканием (по норме $\tilde{\mathfrak{A}}_p$) алгебры $\tilde{\mathfrak{A}}_+(\tilde{\mathfrak{A}}_-)$.

Пусть P — проектор, определенный в пространстве $L_p(-\infty, \infty)$ равенством

$$(P\varphi)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$

и Q — дополнительный проектор: $Q = I - P$.

Легко видеть, что имеют место равенства

$$A_+P = PA_+P, \qquad A_-Q = QA_-Q \tag{4.7}$$

для любых операторов $A_\pm \in \tilde{\mathfrak{A}}_p^\pm$.

Парное уравнение (4.1), очевидно, можно записать в виде

$$PW_1\varphi + QW_2\varphi = f,$$

где W_j $(j=1,2)$ — операторы из алгебры $\tilde{\mathfrak{A}}$, определенные символами $\mathscr{W}_j(\lambda) = a^{(j)}(\lambda) + \mathscr{K}_j(\lambda)$ $(j=1,2)$. Уравнение (4. 2) можно записать в виде

$$W_1P\varphi + W_2Q\varphi = f.$$

В этом параграфе будут рассматриваться в $L_p(-\infty, \infty)$ операторы вида $PA_1 + QA_2$ или $A_1P + A_2Q$, где $A_1, A_2 \in \tilde{\mathfrak{A}}_p$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$.

Существенными для дальнейшего являются следующие равенства

$$(A_1P + A_2Q)(A_+P + A_-Q) = A_1A_\pm P + A_2A_-Q \tag{4.8}$$

и

$$(PA_- + QA_+)(PA_1 + QA_2) = PA_-A_1 + QA_+A_2, \tag{4.9}$$

которые справедливы для любых операторов $A_1, A_2 \in \tilde{\mathfrak{A}}_p$ и $A_\pm \in \tilde{\mathfrak{A}}_p^\pm$.

2. *Основная теорема.*

Теорема 4. 1. *Пусть операторы $A_1, A_2 \in \tilde{\mathfrak{A}}_p$. Для чтобы оператор $A_1P + A_2Q$ $(PA_1 + QA_2)$ был обратим хотя бы с одной стороны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\inf_{-\infty<\lambda<\infty} |\mathscr{A}_j(\lambda)| > 0 \qquad (j=1,2). \tag{4.10}$$

Пусть эти условия выполнены и числа ν, n являются индексами функции $\mathscr{A}_1(\lambda)/\mathscr{A}_2(\lambda)$. Тогда при $\nu>0$ оператор $A_1P + A_2Q(PA_1 + QA_2)$ обратим только слева, при $\nu<0$ он обратим только справа, а при $\nu=0$ он обратим, обратим только справа, обратим только слева в зависимости от того, будет ли число n равным нулю, отрицательным, положительным.

Доказательство. Пусть выполнены условия (4. 10). Тогда оператор A_1P+A_2Q можно представить в виде

$$A_1P+A_2Q = A_2(CP+Q),$$

где $C\in\tilde{\mathfrak{A}}_p$ — оператор с символом $\mathscr{A}_1(\lambda)/\mathscr{A}_2(\lambda)$.

Так как оператор A_2 обратим, то остаётся исследовать оператор $CP+Q$, который в свою очередь можно представить в виде $CP+Q = (PCP+Q)(I+ +QCP)$.

Оператор $I+QCP$ обратим и $(I+QCP)^{-1} = I-QCP$.)

Из теоремы 3. 6 непосредственно вытекает, что оператор $PCP+Q$ обратим только слева при $\nu>0$, только справа при $\nu<0$, и при $\nu=0$ он обратил только справа, только слева или с двух сторон в зависимости от знака индекса n.

Перейдем к доказательству необходимости условий теоремы. Предположим, что оператор A_1P+A_2Q обратим с какой либо стороны. Так же как в доказательстве теоремы 2. 4 можно в дальнейшем ограничиться рассмотрением случая, когда символы $\mathscr{A}_1(\lambda)$ и $\mathscr{A}_2(\lambda)$ имеют вид

$$\mathscr{A}_j(\lambda) = \sum_{m=1}^{n} a_m^{(j)} e^{i\delta_m\lambda} + \int_a^b k_j(t) e^{i\lambda t}\,dt \qquad (k_j(t)\in L_1,\quad j = 1, 2).$$

Пусть k — настолько большое натуральное число, что $\tilde{U}^kA_1\in\tilde{\mathfrak{A}}_+$ и $\tilde{U}^{-k}A_2\in\tilde{\mathfrak{A}}_-$, где $\tilde{U}\,(\in\tilde{\mathfrak{A}})$ — оператор с символом $e^{i\lambda}$. Тогда в силу (4. 8) имеют место равенства

$$\begin{aligned} A_1P+A_2Q &= \tilde{U}^{-k}(P+\tilde{U}^kA_2Q)(\tilde{U}^kA_1P+Q),\\ A_1P+A_2Q &= \tilde{U}^k(\tilde{U}^{-k}A_1P+Q)(P+\tilde{U}^{-k}A_2Q). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Пусть, например, оператор A_1P+A_2Q обратим справа. Тогда в силу равенств (4. 11) операторы $P+\tilde{U}^kA_2Q$ и $\tilde{U}^{-k}A_1P+Q$ обратимы справа. Из равенств

$$P+\tilde{U}^kA_2Q = (P+Q\tilde{U}^kA_2Q)(I+P\tilde{U}^kA_2Q),$$

$$\tilde{U}^{-k}A_1P+Q = (P\tilde{U}^{-k}A_1P+Q)(I+Q\tilde{U}^{-k}A_1P)$$

следует обратимость справа операторов $P+Q\tilde{U}^{-k}A_2Q$ и $P\tilde{U}^{-k}A_1P+Q$. Применяя теорему 3. 6, получим, что выполнены условия (4. 10).

Аналогичным образом доказывается теорема для оператора PA_1+QA_2.

Замечание. Если хотя бы одно из условий (4. 10) не выполнено, то легко показать, что оператор $A_1P+A_2Q(PA_1+QA_2)$ не является ни Φ_+- ни Φ_--оператором.

Отметим, что также как в параграфе 2 при условии $A_1, A_2 \in \tilde{\mathfrak{A}}$ можно описать нули оператора $A_1P + A_2Q(PA_1 + QA_2)$ и его множество значений. Однако на этом мы не будем останавливаться.

В заключение отметим, что хотя все рассмотрения в статье велись в пространствах L_p, их можно без труда распространить на значительно более широкий класс пространств.

3. *Связь с граничной задачей.* Полученные выше результаты можно интерпретировать как результаты о граничной задаче теории функций с коэффициентами, имеющими на бесконечности точку разрыва второго рода. Поясним это подробнее. Обозначим через $\mathfrak{F}_p^+(\mathfrak{F}_p^-)$ совокупность всех преобразований Фурье функций из L_p $(0, \infty)$ $(L_p(-\infty, 0)$. Как известно, функции из $\mathfrak{F}_p^+(\mathfrak{F}_p^-)$ допускают голоморфные продолжения в верхнюю (нижнюю) полуплоскость. Рассмотренные в §§ 3, 4 уравнения, очевидно, эквивалентны следующим граничным задачам

$$\mathscr{A}(\lambda)\Phi_+(\lambda) - \Phi_-(\lambda) = F_+(\lambda) \qquad (-\infty < \lambda < \infty),$$

$$\mathscr{A}_1(\lambda)\Phi_+(\lambda) + \mathscr{A}_2(\lambda)\Phi_-(\lambda) = F(\lambda) \qquad (-\infty < \lambda < \infty),$$

$$[\mathscr{A}_1(\lambda)\Phi(\lambda)]_+ + [\mathscr{A}_2(\lambda)\Phi(\lambda)]_- = F(\lambda) \qquad (-\infty < \lambda < \infty),$$

где $\mathscr{A}(\lambda), \mathscr{A}_1(\lambda), \mathscr{A}_2(\lambda) \in \mathfrak{A}_p$; $F_+(\lambda), \Phi_+(\lambda) \in \mathfrak{F}_p^+$, $\Phi_-(\lambda) \in \mathfrak{F}_p^-$, $F(\lambda)$ —преобразование Фурье функции $f(t) \in L_p$ $(-\infty, \infty)$, а $[F(\lambda)]_\pm$ определяются равенствами

$$[F(\lambda)]_+ = \int_0^\infty f(t)^{i\lambda t}\, dt, \quad [F(\lambda)]_- = \int_{-\infty}^0 f(t)e^{i\lambda t}\, dt.$$

Коэффициенты $\mathscr{A}(\lambda)$, $\mathscr{A}_1(\lambda)$, $\mathscr{A}_2(\lambda)$, имеют на бесконечности точку разрыва второго рода, однако специального вида.

Цитированная литература

[1] И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шилов, *Коммутативные нормированные кольца* (Москва, 1960).

[2] М. Г. Крейн, Интегральные уравнения по полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, *Усп. матем. наук.*, **13: 5** (1958), 3—120.

[3] Б. М. Левитан, *Почти-периодические функции* (Москва, 1953).

[4] И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман, *Проекционные методы решения уравнений Винера—Хопфа,* (Кишинев, 1967).

[5] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, *Усп. матем. наук,* **12: 2** (1957), 44—118.

[6] B. Yood, Properties of linear transformations preserved under addition of a completely continuous transformation, *Duke Math. J.*, **18** (1951), 599—612.

[7] И. Ц. Гохберг, Задача факторизации в нормированных кольцах, функции от изометрических операторов и сингулярные интегральные уравнения, *Усп. матем. наук,* **19:1** (1964), 71—124.

(Поступило 16/VII/1968)

Обобщение теоремы Надя—Фояша о факторизации характеристической оператор-функции

А. В. КУЖЕЛЬ (Умань, СССР)

При изучении операторов, которые „мало" отклоняются*) от унитарного, разными авторами (см. [1—6]) вводилось понятие характеристической матрицы-функции или характеристической оператор-функции, изучение свойств которых даёт возможность выяснить ряд важных свойств рассматриваемых операторов. При этом существенную роль в теории характеристических функций играет теорема умножения, которая впервые была установлена в [3]. В окончательном виде (для случая, когда оператор T непрерывно обратим и оператор $I-T^*T$ конечномерный) теорема умножения вытекает из аналогичной теоремы, установленной в [7] для случая операторов, действующих в пространстве с индефинитной метрикой.

В случае операторов сжатия Б. С.-Надь и Ч. Фояш [8] рассматривали и изучали соответствующие характеристические оператор-функции без каких либо ограничений относительно оператора $I-T^*T$. Затем в работах [9] и [10] в результате оригинальных построений ими была установлена формула умножения (аналог теоремы умножения) характеристических оператор-функций.

Здесь указанная формула умножения обобщается на случай произвольного ограниченного оператора T в предположении, что рассматриваемые инвариантные подпространства оператора T являются NF-подпространствами (§ 2). При этом предварительно вводится понятие характеристической оператор-функции в случае произвольного ограниченного оператора.

Отметим, что существует несколько в той или иной мере различных определений характеристической оператор-функции ограниченного неунитарного оператора (см. [11—14]). Здесь мы напоминаем и пользуемся определением из [14].

В заключение выражаю признательность проф. М. Г. Крейну, обратившему внимание автора на рассматриваемый круг вопросов.

*) Говорят, что ограниченный оператор T мало отклоняется от унитарного, если оператор $I-T^*T$ вполне непрерывный (в частности, конечномерный).

§ 1. Характеристическая оператор-функция

1. Пусть T — линейный ограниченный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Положим $D_T = I - T^*T$ и пусть

$$D_T = J|D_T| \quad \left(|D_T| = \sqrt{D_T^2}, \quad J = \operatorname{sign} D_T\right) \tag{1.1}$$

— полярное представление оператора D_T. В (1.1) J является частично изометрическим оператором [15], действующим из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{N}_T = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{Y}$ ($\mathfrak{Y}$ — подпространство нулей оператора D_T). Легко проверить, что оператор J перестановочен с $|D_T|$ а, значит, и с $|D_T|^{\frac{1}{2}}$. Кроме того, оператор J эрмитов и связан с оператором проектирования P на подпространство $\mathfrak{N}_T$ соотношением

$$J^2 = P. \tag{1.2}$$

Аналогично, если $D_{T^*} = \tilde{J}|D_{T^*}|$ — полярное представление оператора $D_{T^*} = I - TT^*$, то

$$\tilde{J}^* = \tilde{J}, \quad \tilde{J}|D_{T^*}|^{\frac{1}{2}} = |D_{T^*}|^{\frac{1}{2}}\tilde{J}. \tag{1.3}$$

Далее, т. к. $A^{\frac{1}{2}} (A \geqq O)$ является пределом (в сильном смысле) некоторой последовательности многочленов от A (см. [16], стр. 287), то из соотношения $FA = BF$, где F — некоторый ограниченный оператор, а $B \geqq O$, вытекает, что $FA^{\frac{1}{2}} = B^{\frac{1}{2}}F$. Воспользовавшись этим свойством, устанавливаем, что $T(D_T^2)^{\frac{1}{2}} = (D_{T^*}^2)^{\frac{1}{2}} T$, т. е.

$$T|D_T| = |D_{T^*}|T. \tag{1.4}$$

Аналогично устанавливается, что

$$T|D_T|^{\frac{1}{2}} = |D_{T^*}|^{\frac{1}{2}} T. \tag{1.5}$$

Используя предыдущие результаты, находим:

$$TJ|D_T| = TD_T = D_{T^*}T = \tilde{J}|D_{T^*}|T = \tilde{J}T|D_T|$$

и, следовательно,

$$TJ = \tilde{J}T \tag{1.6}$$

2. Положим для удобства $Q_T = |D_T|^{\frac{1}{2}}$ и рассмотрим оператор-функцию $\Theta_T(z)$, определяемую соотношением

$$\Theta_T(z) = TJ - zQ_{T^*}(I - zT^*)^{-1} Q_T. \tag{1.7}$$

Оператор-функцию $\Theta_T(z)$ будем называть *характеристической оператор-функцией* оператора T.

Так как $Q_{T^*}\mathfrak{H} \subset \mathfrak{N}_{T^*}$ и $TJ\mathfrak{H} = T\mathfrak{N}_T \subset \mathfrak{N}_{T^*}$, то

$$\Theta_T(z)\mathfrak{H} \subset \mathfrak{N}_{T^*}. \tag{1.8}$$

Учитывая теперь то, что операторы Q_T и Q_{T^*} эрмитовы и используя соотношение (1. 6), устанавливаем, что $\Theta_T^*(z) = \Theta_{T^*}(\bar{z})$.

Отметим ещё следующие соотношения, которые понадобятся в дальнейшем:

$$\Theta_T(z)Q_TJ = Q_{T^*}(I-zT^*)^{-1}(T-zI), \tag{1.9}$$

$$\Theta_T(z)J\Theta_T^*(0) = \tilde{J}-Q_{T^*}(I-zT^*)^{-1}Q_{T^*}, \tag{1.10}$$

$$\Theta_T^*(0)\tilde{J}\Theta_T(z) = J-Q_T(I-zT^*)^{-1}Q_T. \tag{1.11}$$

Чтобы получить (1. 9), достаточно умножить (1. 7) справа на Q_TJ и воспользоваться соотношениями $Q_TJ = JQ_T$ и (1. 5). Для доказательства (1. 10) достаточно умножить (1. 7) справа на $J\Theta_T^*(0)$ и воспользоваться соотношениями $\Theta_T(0) = TJ$ (1. 6) и (1. 5). Подобным же образом устанавливается и соотношение (1. 11).

§ 2. *NF*-подпространства

1. Пусть $\mathfrak{H}_1$ — инвариантное относительно оператора T подпространство пространства $\mathfrak{H}$. Тогда подпространство $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1$ инвариантно относительно оператора T^* и, при этом, операторы T и T^* можно представить в виде

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & \Gamma \\ O & T_2 \end{pmatrix}, \quad T^* = \begin{pmatrix} T_1^* & O \\ \Gamma^* & T_2^* \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

где $T_1 = T|_{\mathfrak{H}_1}$, $T_2 = (T^*|_{\mathfrak{H}_2})^*$, а Γ — ограниченный оператор, отображающий $\mathfrak{H}_2$ в $\mathfrak{H}_1$.

В дальнейшем инвариантное подпространство $\mathfrak{H}_1$ будем называть *подпространством Надя—Фояша* (*NF-подпространством*), если оператор Γ может быть представлен в виде

$$\Gamma = Q_{T_1^*}LQ_{T_2}, \tag{2.2}$$

где L — некоторый ограниченный оператор, отображающий $\mathfrak{H}_2$ в $\mathfrak{H}_1$. Как показали Б. С.- Надь и Ч. Фояш [9, 10], произвольное инвариантное подпространство сжатия T является *NF*-подпространстрвом.[1])

[1]) Однако в общем случае указанное свойство не сохраняется. Действительно, легко построить пример оператора, инвариантное подпространство которого не является *NF*-подпространством. Для этого достаточно в пространстве $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ рассмотреть оператор T, определяемый соотношением (2.1), где T_1 и T_2 — произвольные ограниченные операторы, действующие в подпространствах $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ соответственно, а оператор Γ выбран так, чтобы его область значений не содержалась в $\mathfrak{N}_{T_1^*}$. В частности, если T_1 — унитарный оператор, а оператор Γ отличен от нулевого, то инвариантное подпространство $\mathfrak{H}_1$ оператора T не будет *NF*-подпространством.

Не ограничивая общности, можем считать, что в случае NF-подпространств

$$\mathfrak{D}(L)\subset\mathfrak{N}_{T_2},\quad \mathfrak{R}(L)\subset\mathfrak{N}_{T_1^*},\quad \mathfrak{D}(L^*)\subset\mathfrak{N}_{T_1^*},\quad \mathfrak{R}(L^*)\subset\mathfrak{N}_{T_2},$$

где $\mathfrak{D}(A)$ — область определения, а $\mathfrak{R}(A)$ — множество значений оператора A.

2. Пусть $D_{T_k}=Q_{T_k}^2J_k$ ($Q_{T_k}=|D_{T_k}|^{\frac{1}{2}}$) — полярное представление оператора $D_{T_k}=I_k-T_k^*T_k$ ($k=1, 2$). Используя соотношения (2. 1), (2. 2) и (1. 4), убеждаемся, что

(2. 3) $$D_T=QXQ,$$

где

(2. 4) $$Q=\begin{pmatrix}Q_{T_1} & O\\ O & Q_{T_2}\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}J_1 & -T_1^*L\\ -L^*T_1 & J_2-L^*Q_{T_1^*}^2L\end{pmatrix}.$$

Положим

(2. 5) $$S_L=J_2-L^*\tilde{J}_1L,$$

где $\tilde{J}_1=\operatorname{sign} D_{T_1^*}$. Воспользовавшись равенствами $Q_{T_1^*}^2=(I_1-T_1T_1^*)\tilde{J}_1$ и (1. 6), получим:

$$J_2-L^*Q_{T_1^*}^2L=S_L+L^*T_1J_1T_1^*L.$$

После этого операторная матрица X запишется в виде

(2. 6) $$X=\gamma^*J_0\gamma,$$

где

(2. 7) $$\gamma=\begin{pmatrix}J_1 & -T_1^*L\\ O & |S_L|^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix},\quad J_0=\begin{pmatrix}J_1 & O\\ O & J_L\end{pmatrix},$$

а $J_L=\operatorname{sign}S_L$. Подставляя (2. 6) в (2. 3) и учитывая соотношение $D_T=Q_TJQ_T$, получим:

(2. 8) $$Q_TJQ_T=Q\gamma^*J_0\gamma Q.$$

3. Рассмотрим оператор σ, определяемый соотношением

(2. 9) $$\sigma Q_Tf=\gamma Qf\qquad (f\in\mathfrak{H})$$

и покажем, что такое определение корректно. Для этого достаточно показать, что если $Q_Tf=0$, то и $\gamma Qf=0$. Пусть $Q_Tf=0$. Тогда, в силу (2. 8), при любом $\varphi\in\mathfrak{H}$

$$(\gamma Qf,\ J_0\gamma Q\varphi)=0.$$

При этом, в силу (2. 4) и (2. 7), $\gamma Qf=g_1+g_2$, где

(2. 10) $$g_1=J_1Q_{T_1}f_1-T_1^*LQ_{T_2}f_2,\quad g_2=|S_L|^{\frac{1}{2}}Q_{T_2}f_2$$

Если при этом $\varphi\in\mathfrak{H}_1$, то, как легко убедиться (используя соотношения (2. 4) и (2. 7)) $J_0\gamma Q\varphi=Q_{T_1}\varphi$. Поэтому в этом случае

$$(\gamma Qf,\ J_0\gamma Q\varphi)=(g_1,\ Q_{T_1}\varphi)=0\quad (\varphi\in\mathfrak{H}_1)$$

и, следовательно, $g_1 \perp \mathfrak{N}_{T_1}$. С другой стороны, так как $\mathfrak{R}(L) \subset \mathfrak{N}_{T_1^*}$, $T_1^* \mathfrak{N}_{T_1^*} \subset \mathfrak{N}_{T_1}$ и $J_1 \mathfrak{N}_{T_1} = \mathfrak{N}_{T_1}$, то $g_1 \in \mathfrak{N}_{T_1}$. Следовательно, $g_1 = 0$ и $\gamma Q f = g_2$. Но тогда, при любом $\varphi \in \mathfrak{H}$

$$(\gamma Q f, J_0 \gamma Q \varphi) = (g_2, J_L |S_L|^{\frac{1}{2}} Q_{T_2} \varphi) = 0.$$

Следовательно, $g_2 \in \mathfrak{R}(|S_L|^{\frac{1}{2}})$ и $g_2 \perp \mathfrak{R}(|S_L|^{\frac{1}{2}})$, т. е. $g_2 = 0$. Таким образом, определение оператора σ корректно. При этом, как легко видеть, оператор σ линейный.

Найдем теперь оператор σ^*. Используя соотношение (2. 8) и свойства операторов Q_T и J, легко установить, что если при некотором f $J_0 \gamma Q f = 0$, то $J Q_T f = 0$. Поэтому мы можем рассмотреть линейный оператор A, определяемый соотношением

$$A(J_0 \gamma Q f) = J Q_T f. \tag{2. 11}$$

Если теперь g — фиксированный вектор из $\mathfrak{H}$, то при любом $f \in \mathfrak{H}$, в силу (2. 9), (2. 8) и (2. 11),

$$(\sigma Q_T f, J_0 \gamma Q g) = (Q_T J Q_T f, g) = (Q_T f, A J_0 \gamma Q g).$$

А это означает, что

$$\sigma^* J_0 \gamma Q f = J Q_T f \qquad (f \in \mathfrak{H}). \tag{2. 12}$$

Используя теперь (2. 9) и (2. 12), устанавливаем, что

$$\sigma^* J_0 \sigma \subseteqq J, \quad \sigma J \sigma^* \subseteqq J_0. \tag{2. 13}$$

Учитывая эти соотношения, операторы σ и σ^* будем соответственно называть (J, J_0)-*изометрическим* и (J_0, J)-*изометрическим*.

3. Рассуждая как и раньше, устанавливаем, что оператор $Q_{T^*} \tilde{J} Q_{T^*} = D_{T^*}$ представим в виде

$$Q_{T^*} \tilde{J} Q_{T^*} = \tilde{Q} \tilde{\gamma} \tilde{J}_0 \tilde{\gamma}^* \tilde{Q}, \tag{2. 14}$$

где

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} Q_{T_1^*} & O \\ O & Q_{T_2^*} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma} = \begin{pmatrix} |\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}} & -L T_2^* \\ O & \tilde{J}_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{J}_0 = \begin{pmatrix} \tilde{J}_L & O \\ O & \tilde{J}_2 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{S}_L = \tilde{J}_1 - L J_2 L^*, \quad \tilde{J}_L = \operatorname{sign} \tilde{S}_L.$$

Отметим, что как легко проверить, операторы S_L и $\tilde{S}_L$ связаны соотношением

$$\tilde{S}_L \tilde{J}_1 L = L J_2 S_L. \tag{2. 15}$$

Определим оператор $\tilde{\sigma}$ соотношением

$$\tilde{\sigma} Q_{T^*} f = \tilde{\gamma}^* \tilde{Q} f \qquad (f \in \mathfrak{H}). \tag{2. 16}$$

Как и в предыдущем пункте устанавливается, что такое определение корректно, оператор $\tilde{\sigma}^*$ определён соотношением

$$\tilde{\sigma}^*(\tilde{J}_0\tilde{\gamma}^*\tilde{Q}f) = \tilde{J}Q_{T^*}f \tag{2.17}$$

и, при этом,

$$\tilde{\sigma}\tilde{J}\tilde{\sigma}^* \subseteqq \tilde{J}_0, \quad \tilde{\sigma}^*\tilde{J}_0\tilde{\sigma} \subseteqq \tilde{J} \tag{2.18}$$

(т. е. оператор $\tilde{\sigma}$ является $(\tilde{J}, \tilde{J}_0)$-изометрическим, а $\tilde{\sigma}^*$ — $(\tilde{J}_0, \tilde{J})$-изометрическим).

§ 3. Факторизация характеристической оператор-функции

1. На основании (1. 9) и (2. 17)

$$\Theta_T(z)Q_TJ = \tilde{U}N, \tag{3.1}$$

где $\tilde{U} = \tilde{J}\tilde{\sigma}^*\tilde{J}_0$, а

$$N = \tilde{\gamma}^*\tilde{Q}(I - zT^*)^{-1}(T - zI). \tag{3.2}$$

При этом, в силу (2. 18),

$$\tilde{U}\tilde{J}_0\tilde{U}^* \subseteqq \tilde{J}, \quad \tilde{U}^*\tilde{J}\tilde{U} \subseteqq \tilde{J}_0. \tag{3.3}$$

Используя равенства (2. 1), находим:

$$K_z = \begin{pmatrix} K_{1z} & O \\ zK_{2z}\Gamma^*K_{1z} & K_{2z} \end{pmatrix}, \quad T - zI = \begin{pmatrix} T_1 - zI_1 & \Gamma \\ O & T_2 - zI_2 \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

где

$$K_z = (I - zT^*)^{-1}, \quad K_{jz} = (I_j - zT_j^*)^{-1} \qquad (j = 1, 2);$$

I_j — единичный оператор в пространстве $\mathfrak{H}_j$. Подставляя (3. 4) в (3. 2) и используя выражения для операторов $\tilde{\gamma}^*$ и $\tilde{Q}$, а также, соотношение (1. 9), записанное для операторов T_1 и T_2, получим:

$$N = \begin{pmatrix} |\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}} & O \\ -T_2L^* & \tilde{J}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_{T_1^*}T_1(z) & Q_{T_1^*}K_{1z}\Gamma \\ Q_{T_2^*}F(T_1 - zI_1) & Q_{T_2^*}F\Gamma + Q_{T_2^*}T_2(z) \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

где

$$F = zK_{2z}\Gamma^*K_{1z}, \quad T_j(z) = K_{jz}(T_j - zI_j) \qquad (j = 1, 2). \tag{3.6}$$

Если при этом N_{kl} — элементы операторной матрицы N, то, в силу (3. 5), (3. 6) и (1. 9),

$$N_{11} = |\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}}\Theta_{T_1}(z)Q_{T_1}J_1. \tag{3.7}$$

На основании соотношений (3. 5), (3. 6), (2. 2) и (1. 10) (записывая последнее для оператора T_1 в виде $Q_{T_1^*}K_{1z}Q_{T_1^*} = \tilde{J}_1 - \Theta_{T_1}(z)J_1T_1^*\tilde{J}_1$), получим:

$$N_{12} = |\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}}[I_1 - \Theta_{T_1}(z)J_1T_1^*]\tilde{J}_1LQ_{T_2}. \tag{3.8}$$

Аналогично, используя соотношения (3. 5), (3. 6), (1. 9) и (2. 2), устанавливаем, что

$$N_{21} = [-T_2P_2+z\tilde{J}_2Q_{T_2^*}K_{2z}Q_{T_2}]L^*\Theta_{T_1}(z)Q_{T_1}J_1,$$

где P_2 — оператор проектирования на $\mathfrak{N}_{T_2}$. А так как $T_2P_2=T_2J_2^2=\tilde{J}_2T_2J_2$, то

$$-T_2P_2+z\tilde{J}_2Q_{T_2^*}K_{2z}Q_{T_2} = -\tilde{J}_2\Theta_{T_2}(z) \tag{3.9}$$

и, следовательно,

$$N_{21} = -\tilde{J}_2\Theta_{T_2}(z)L^*\Theta_{T_1}(z)Q_{T_1}J_1. \tag{3.10}$$

Вычислим, наконец, оператор N_{22}. В силу (3. 5), (3. 6) и (2. 2)

$$N_{22} = [-T_2P_2+z\tilde{J}_2Q_{T_2^*}K_{2z}Q_{T_2}]L^*Q_{T_1^*}K_{1z}Q_{T_1^*}LQ_{T_2}+\tilde{J}_2Q_{T_2^*}T_2(z).$$

Воспользовавшись теперь соотношениями (3. 9), (3. 6), (1. 9) и перестановочностью операторов Q_{T_2} и J_2, получим:

$$N_{22} = \tilde{J}_2\Theta_{T_2}(z)[J_2-L^*Q_{T_1^*}K_{1z}Q_{T_1^*}L]Q_{T_2}.$$

А так как, в силу соотношений (1. 10), (2. 5) и $J_1\Theta_{T_1}^*(0)=P_1T_1^*$,

$$J_2-L^*Q_{T_1^*}K_{1z}Q_{T_1^*}L = S_L+L^*\Theta_{T_1}(z)T_1^*L,$$

то, окончательно,

$$N_{22} = \tilde{J}_2\Theta_{T_2}(z)[S_L+L^*\Theta_{T_1}(z)T_1^*L]Q_{T_2}. \tag{3.11}$$

После этого, как легко проверить,

$$N = \begin{pmatrix} |\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}}\Theta_{T_1}(z) & |\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}}\tilde{J}_1L \\ -\tilde{J}_2\Theta_{T_2}(z)L^*\Theta_{T_1}(z) & \tilde{J}_2\Theta_{T_2}(z)S_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 & -T_1^*L \\ O & I_2 \end{pmatrix} Q, \tag{3.12}$$

где оператор Q определяется соотношением (2. 4).

2. Рассмотрим теперь оператор R, определяемый соотношением

$$R|S_L|^{\frac{1}{2}}f_2 = |\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}}\tilde{J}_1Lf_2 \tag{3.13}$$

и покажем, что $|\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}}\tilde{J}_1Lf_2=0$, если $|S_L|^{\frac{1}{2}}f_2=0$ при некотором $f_2\in\mathfrak{H}_2$. Действительно, в таком случае $S_Lf_2=0$ и, следовательно, в силу (2. 15), $\tilde{S}_L\tilde{J}_1Lf_2=0$.

Положим $\varphi=|\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}}\tilde{J}_1Lf_2$. Тогда, на основании предыдущего, $|\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}}\varphi=0$ и, следовательно,

$$(\varphi, \varphi) = (|\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}}\varphi, \quad \tilde{J}_1Lf_2) = 0, \quad \text{т. е.} \quad |\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}}\tilde{J}_1Lf_2 = 0.$$

Отметим, что в том случае, когда T_1 и T_2 — сжатия,

$$S_L=D_L, \quad \tilde{S}_L=D_{L^*}, \quad |\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}}L = L|S_L|^{\frac{1}{2}}$$

и, следовательно, $R=L$.

Используя соотношение $L^*\tilde{J}_1\tilde{S}_L = S_L J_2 L^*$ (которое вытекает из (2. 15)) и рассуждая так же, как и при доказательстве корректности определения оператора R, устанавливаем, что равенство $|\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}}\tilde{J}_L f_2 = 0$ ($f_2 \in \mathfrak{H}_2$) влечёт равенство $|S_L|^{\frac{1}{2}} J_L J_2 L^* f_2 = 0$. Следовательно, мы можем рассмотреть линейный оператор B, определяемый соотношением

$$(3.14)\qquad B|\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}}\tilde{J}_L f_2 = |S_L|^{\frac{1}{2}} J_L J_2 L^* f_2.$$

После этого легко проверить, что

$$(R|S_L|^{\frac{1}{2}} f_2, |\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}}\tilde{J}_L g_2) = (|S_L|^{\frac{1}{2}} f_2, B|\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}}\tilde{J}_L g_2)$$

и, следовательно, $B = R^*$.

Для дальнейшего необходимы следующие соотношения:

$$(3.15)\qquad RJ_L R^* \leqq \tilde{J}_L - |\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}}\tilde{J}_1|\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}},$$

$$(3.16)\qquad R^*\tilde{J}_L R \leqq J_L - J_L|S_L|^{\frac{1}{2}} J_2 |S_L|^{\frac{1}{2}} J_L.$$

Чтобы обосновать (3. 15), положим $\varphi = |\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}}\tilde{J}_L f_2$ и воспользуемся соотношениями (3. 14), (3. 13) и выражением для оператора $\tilde{S}_L$. В результате получим:

$$RJ_L R^*\varphi = \tilde{J}_L\varphi - |\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}}\tilde{J}_1|\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}}\varphi,$$

что и доказывает (3. 15). Соотношение (3. 16) обосновывается аналогично.

3. Воспользовавшись соотношениями (3. 12) и (3. 13), получим, после некоторых простых преобразований:

$$(3.17)\qquad N = \begin{pmatrix} I_1 & O \\ O & \tilde{J}_2 \end{pmatrix} \Theta_2(z)\omega\Theta_1(z)\gamma Q,$$

где

$$\Theta_1(z) = \begin{pmatrix} \Theta_{T_1}(z) & O \\ O & I_2 \end{pmatrix}, \quad \Theta_2(z) = \begin{pmatrix} I_1 & O \\ o & \Theta_{T_2}(z) \end{pmatrix}, \qquad \omega = \begin{pmatrix} |\tilde{S}_L|^{\frac{1}{2}} & R \\ -L^* & |S_L|^{\frac{1}{2}} J_L \end{pmatrix}.$$

При этом, как легко проверить, воспользовавшись соотношениями (3. 13), (3. 15) и (3. 16),

$$(3.18)\qquad \omega J_\alpha \omega^* \leqq J_\beta, \quad \omega^* J_\beta \omega \leqq J_\alpha,$$

где

$$J_\alpha = \begin{pmatrix} \tilde{J}_1 & O \\ O & J_L \end{pmatrix}, \quad J_\beta = \begin{pmatrix} \tilde{J}_L & O \\ O & J_2 \end{pmatrix}.$$

После этого, на основании (3. 1) и (3. 17),

$$(3.19)\qquad \Theta_T(z) Q_T J = U\Theta_2(z)\omega\Theta_1(z)\sigma Q_T,$$

где $U = \tilde{U}\begin{pmatrix} I & O \\ O & \tilde{J}_2 \end{pmatrix}$. Учитывая при этом выражение для оператора $\tilde{J}_0$ и соотношения (3. 3), убеждаемся, что оператор U является $(\tilde{J}_0, \tilde{J})$-изометрическим, а оператор U^* — $(\tilde{J}, \tilde{J}_0)$-изометрическим.

Так как операторы Q_T и J перестановочны, то, в силу (3. 19), при любом $f \in \mathfrak{H}$

$$\Theta_T(z)J\varphi = U\Theta_2(z)\omega\Theta_1(z)\sigma\varphi \qquad (\varphi = Q_T f),$$

или

$$\Theta_T(z)\varphi = U\Theta_2(z)\omega\Theta_1(z)V\varphi \qquad (\varphi \in Q_T\mathfrak{H}),$$

где $V = \sigma J$. Используя соотношение (2. 13), убеждаемся, что оператор V является (J, J_0)-изометрическим.

Таким образом, на основании предыдущего, имеет место следующая

Теорема. *Если инвариантное подпространство $\mathfrak{H}_1$ ограниченного оператора T является NF-подпространством, то*

$$\Theta_T(z)|_{\mathfrak{L}} = U\Theta_2(z)\omega\Theta_1(z)V \qquad (\mathfrak{L} = Q_T\mathfrak{H}), \tag{3.20}$$

где

$$\Theta_1(z) = \begin{pmatrix} \Theta_{T_1}(z) & O \\ O & I_2 \end{pmatrix}, \quad \Theta_2(z) = \begin{pmatrix} I_1 & O \\ O & \Theta_{T_2}(z) \end{pmatrix},$$

U, V и ω — постоянные соответственно $(\tilde{J}_0, \tilde{J})$-, (J, J_0)-, и (J_α, J_β)-изометрические операторы.

4. В том случае, когда оператор T является сжатием, операторы J, $\tilde{J}$, J_k, $\tilde{J}_k$ $(k = 1, 2)$, J_L, $\tilde{J}_L$, J_0 и $\tilde{J}_0$ совпадают на соответствующих подпространствах с единичными операторами; оператор $S_L = D_L$; $R = L$; операторы U, V и ω являются частично изометрическими операторами и, следовательно, могут быть расширены по непрерывности. В результате равенство (3. 20) будет выполняться на всём подпространстве $\mathfrak{R}_T$. Таким образом, в этом случае полученный результат совпадает с результатом работы [10] (теорема 2).

В заключение отметим, что в случае непрерывной обратимости оператора T и конечномерности оператора $I - T^*T$ полученный здесь результат не перекрывает соответствующего результата из работы [7] (так как в [7] на оператор Γ не накладывалось никаких ограничений).

Цитированная литература

[1] М. С. Лившиц, Об одном классе линейных операторов в гильбертовом пространстве, *Матем. сб.*, **19 (61)** (1946), 239—262.

[2] М. С. Лившиц, Изометрические операторы с равными дефектными числами, квазиунитарные операторы, *Матем. сб.*, **26** (68) (1950), 247—264.

[3] М. С. Лившиц—В. П. Потапов, Теорема умножения характеристических матриц-функций, *ДАН СССР*, **72** (1950), 625—628.

[4] В. Т. Поляцкий, О приведении к треугольному виду квазиунитарных операторов, *ДАН СССР*, **113** (1957), 756—759.

[5] А. В. Кужель, Теорема умножения характеристических матриц-функций неунитарных операторов, *Научн. докл. высшей школы, физ.-мат. науки*, 3 (1959), 33—41.

[6] А. В. Кужель, Характеристичні матриці-функції квазіунітарних операторів довільного рангу в просторі з індефінітною метрикою, *ДАН УРСР*, **9** (1962), 1135—1138.

[7] А. В. Кужель, Спектральный анализ квазиунитарных операторов в пространстве с индефинитной метрикой, *Теория функций, функц. анализ и их приложения*, **4** (1967), 3—27.

[8] B. Sz.-Nagy—C. Foiaş, Modèles fonctionnels des contractions de l'espace de Hilbert. La fonction caractéristique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **256** (1963), 3236—3238.

[9] B. Sz.-Nagy—C. Foiaş, Propriétés des fonctions caractéristiques, modèles triangulaires et une classification des contractions de l'espace de Hilbert, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **256** (1963), 3413—3415.

[10] B. Sz.-Nagy—C. Foiaş, Forme triangulaire d'une contraction et factorisation de la fonction caractéristique, *Acta Sci. Math.*, **28** (1967), 201—212.

[11] Ю. Л. Шмульян, Операторы с вырожденной характеристической функцией, *ДАН СССР*, **93** (1953), 985—988.

[12] И. Ц. Гохберг—М. Г. Крейн, О треугольных представлениях линейных операторов и мультипликативных представлениях их характеристических функций, *ДАН СССР*, **175** (1967), 272—275.

[13] В. Н. Поляков, К теории характеристических функций линейных операторов, *Изв. вузов*, (сер. матем.) **8 (63)** (1967), 53—59.

[14] А. В. Кужель, Характеристична оператор-функція довільного обмеженного оператора, *ДАН УРСР*, (сер. А) **3** (1968), 233—236.

[15] И. Ц. Гохберг—М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве* (Москва, *1965*).

[16] Ф. Рисс—Б. Секефальви-Надь, *Лекции по функциональному анализу* (Москва, *1954*).

(Поступило 13/VI/1968 г.)

On interpolation functions. III

By J. PEETRE in Lund (Sweden)

In several previous notes (see PEETRE [8], [9], [10]; see also GOULAOUIC [5]) we found various conditions, both necessary and sufficient, for a function to be an *interpolation function*, of given power p, $1<p<\infty$ — a notion which has its origin in the work of FOIAŞ—LIONS [4]. In particular what concerns *non-exact* interpolation functions our results were almost complete, while as for *exact* interpolation functions the problem is, up to our knowledge, still essentially open (unless $p=2$, see DONOUGHUE [3]). This note is devoted to the observation that the methods of [8], [9], [10] are sufficiently powerful to settle the question not only in the limiting case $p=1$ (and, by a conveniently modified argument, the case $p=\infty$ too), which is fairly obvious (see [5]), but also in two additional cases of a quite different nature: 1° $0<p<1$, 2° $0<p<\infty$ and, in place of the field of real numbers R, a general local field F (e.g. the field of P-adic numbers Q_P, P being any (rational) prime number). In case 1° we thus have to leave the realm of Banach spaces and admit "quasi-Banach" spaces; in case 2° we encounter analogous vector spaces over the field F. The possibility of both types of extensions, when dealing with interpolation in general, was first realized by KRÉE [6]. In fact it is possible to treat both cases simultanously within the framework of what we call "ϱ-normed additive groups", with a given ϱ, $0<\varrho\leqq\infty$, and p ranging in the interval $0<p\leqq\varrho$. Clearly $\varrho=1$ in case 1° and $\varrho=\infty$ in case 2°. (It should be noted that there are also other parallels between the two cases. E.g. to DAY'S theorem [2] to the effect that (in general) $(L^p)'=0$ if $p<1$ (case 1°) there corresponds $(L^p)'=0$ if $p<\infty$ (case 2°): there is (in general) no integral for functions with values in F (see MONNA [7]).

*

Let G be an additive (Abelian) group. By a ϱ-norm, where $0<\varrho\leqq\infty$, in G we mean a mapping $G\ni a\to\|a\|\in R_+$ such that

a) $\|a\|=0\Leftrightarrow a=0$,

b) $\|a+b\|\leqq(\|a\|^\varrho+\|b\|^\varrho)^{1/\varrho}$ (i.e. $\|a+b\|\leqq\max(\|a\|,\|b\|)$ if $\varrho=\infty$).

If $\varrho<\infty$ then $a\to\|a\|$ is a ϱ-norm if and only if $a\to\|a\|^\varrho$ is a 1-norm. Therefore there are really only two cases: 1° $\varrho=1$ and 2° $\varrho=\infty$. But it is, from the notational point of view, convenient not to pretend of this fact. An additive group G in which a ϱ-norm is singled out we call a ϱ-normed additive group. The principal example is of course when G is a vector space over a "ϱ-valued" field F. If $F=R$ with its usual valuation (absolute value) we must have $\varrho \leqq 1$ (unless $G=0$) but if F is a local field (say, the field of P-adic numbers Q_P) the case $\varrho=\infty$ of course can occur (see [7]). If π is an endomorphism of G (i.e. $\pi(a+b) = \pi(a)+\pi(b)$) we say that π is bounded with bound M if

$$\|\pi a\| \leqq M\|a\|. \tag{1}$$

The additive group of bounded endomorphisms of G we denote by $\mathscr{B}(G)$.

Let X be a locally compact space provided with a positive measure μ, ζ a positive μ-measurable function on X, G a *complete* ϱ-normed additive group, $0<p<\infty$. Denote by $\mathscr{K}=\mathscr{K}(G)$ the space of bounded μ-measurable functions on X with values in G and compact support. If $a\in\mathscr{K}$ we set

$$\|a\|_\zeta = \|a\|_{L^p_\zeta} = \Big[\int_X (\zeta(x)\|a(x)\|)^p\, d\mu\Big]^{1/p}. \tag{2}$$

This is clearly a ϱ_1-norm in $\mathscr{K}$, with $\varrho_1=\min(\varrho, p)$. The completion of $\mathscr{K}$ in this ϱ_1-norm we denote by $L^p_\zeta=L^p_\zeta(G)$. A great portion of the theory of L^p spaces with values in a Banach space E (over R), as developped e.g. in BOURBAKI [1], chap. IV, can be carried over to the present case, L^p spaces with values in a complete ϱ-normed additive group G (and weight function ζ). But if $p<\varrho$, as we have already remarked, there is (in general) no integral (see [7]).

Now we come to our main definition. We say that a function $H=H(z_0, z_1)$, defined, continuous, and positive for $z_0>0$, $z_1>0$, is an *exact interpolation function*, of power p, with respect to G, if for any X, μ, ζ_0, ζ_1 it follows from $\pi\in\mathscr{B}(L^p_{\zeta_0})\cap\mathscr{B}(L^p_{\zeta_1})$ that $\pi\in\mathscr{B}(L^p_\zeta)$, with $\zeta=H(\zeta_0,\zeta_1)$ and

$$M\leqq\max(M_0, M_1) \tag{3}$$

for the three bounds M_0, M_1, M involved. We consider here only functions H which moreover are homogeneous of degree 1. We can thus write

$$H(z_0, z_1) = z_0 h(z_1/z_0)$$

where h is uniquely determined by H.

Our main result now reads:

Theorem. *Assume that H is an exact interpolation function of power p, with respect to a complete ϱ-normed additive group G satisfying the condition:*

($*$) *For every $\varepsilon>0$ there exists a positive number $\lambda<\varepsilon$ and an endomorphism χ of G such that $\|\chi(a)\|=\lambda\|a\|$.*

Then $\varphi(\sigma)=\big(h(\sigma^{1/p})\big)^p$ is concave. If $p\leqq\varrho$ this condition is also sufficient for H to be an exact interpolation function of power p, with respect to any G.

Remark. If G is a vector space over a field F one can take χ in $(*)$ to be multiplication with a suitable $c \in F$. E.g. if $F = Q_P$ we may take c to be a power of P.

Proof (necessity). As in [9], p. 170, we take X to be the set of $n+1$ points $x, x_1, \ldots, x_n$ and assume that μ to each of these points assigns the mass 1. Furthermore we take $\zeta_0 \equiv 1$ and $\zeta_1(x) = z$, $\zeta_1(x_i) = z_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ where

$$z^p = \frac{1}{n}(z_1^p + \cdots + z_n^p). \tag{4}$$

For a given $\varepsilon > 0$ we choose λ and χ as in $(*)$ and take n to be the integer part of $1/\lambda^p$, i.e. $n \leqq 1/\lambda^p < n+1$ or

$$1 - \varepsilon^p < 1 - \lambda^p < n\lambda^p \leqq 1. \tag{5}$$

We define π by

$$\pi a(x) = 0, \quad \pi a(x_i) = \chi(a(x)) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

For the three bounds of π we have then (using the condition on χ in $(*)$)

$$M_0 = \lambda n^{1/p}, \quad M_1 = \lambda \frac{1}{z}[z_1^p + \cdots + z_n^p]^{1/p}, \quad M = \lambda \frac{1}{h(z)}[(h(z_1))^p + \cdots + (h(z_n))^p]^{1/p}$$

or, in view of (4) and (5),

$$M_0 \leqq 1, \quad M_1 \leqq 1, \quad M > (1-\varepsilon^p)^{1/p} \frac{1}{h(z)} \left\{ \frac{1}{n} [(h(z_1))^p + \cdots + (h(z_n))^p] \right\}^{1/p}.$$

From (3) it follows now

$$(1-\varepsilon^p) \frac{1}{n} [(h(z_1))^p + \cdots + (h(z_n))^p] < (h(z))^p$$

or if we set $\sigma_i = z_i^p$ $(i = 1, \ldots, n)$ and use (4) again

$$(1-\varepsilon^p) \frac{\varphi(\sigma_1) + \cdots + \varphi(\sigma_n)}{n} < \Phi\left(\frac{\sigma_1 + \cdots + \sigma_n}{n}\right).$$

Assume for simplicity that n is even, say $n = 2m$. Then we may take $\sigma_i = \sigma$ if $i = 1, \ldots, m$ and $\sigma_i = \tau$ if $i = m+1, \ldots, n$. It follows that

$$(1-\varepsilon^p) \frac{\Phi(\sigma) + \Phi(\tau)}{2} < \Phi\left(\frac{\sigma + \tau}{2}\right)$$

or, since $\varepsilon > 0$ was arbitrary,

$$\frac{\Phi(\sigma) + \Phi(\tau)}{2} \leqq \Phi\left(\frac{\sigma + \tau}{2}\right).$$

This proves the concavity of φ.

Proof (sufficiency). Let us set (see [8])

$$K_p(t, a) = \inf_{a = a_0 + a_1} (\|a_0\|_{\zeta_0}^p + t^p \|a_1\|_{\zeta_1}^p)^{1/p}$$

where $0<t<\infty$ and $a\in L^p_{\zeta_0}+L^p_{\zeta_1}$. It is readily seen, using (1), that

$$K_p(t, \pi a)\leqq \max (M_0, M_1)K_p(t, a).$$

Thus if we can find a representation of the form

$$\|a\|_\zeta = \Phi[K_p(t, a)] \tag{6}$$

with a functional $\Phi[\varphi]$ which is *monotone* and homogeneous of degree 1, we are through, because we then get

$$\|\pi a\|_\zeta = \Phi[K_p(t, \pi a)]\leqq \max (M_0, M_1)\Phi[K_p(t, a)] = \max (M_0, M_1)\|a\|_\zeta,$$

which leads to (3). By (2) we obtain

$$[K_p(t, a)]^p = \inf\int\limits_X [(\zeta_0(x)\|a_0(x)\|)^p+(t\zeta_1(x)\|a_1(x)\|)^p]\,d\mu = \tag{7}$$

$$= \int\limits_X \inf [(\zeta_0(x)\|a_0(x)\|)^p+(t\zeta_1(x)\|a_1(x)\|)^p]\,d\mu.$$

We claim that (if $p\leqq\varrho$)

$$\inf [(\zeta_0(x)\|a_0(x)\|)^p+(t\zeta_1(x)\|a_1(x)\|)^p] = [\min (\zeta_0(x), t\zeta_1(x))\|a(x)\|]^p. \tag{8}$$

Indeed we have, by the "ϱ-triangle inequality" and using the fact that $p\leqq\varrho$,

$$\min (\zeta_0(x), t\zeta_1(x))\|a(x)\| \leqq [(\zeta_0(x)\|a_0(x)\|)^\varrho+(t\zeta_1(x)\|a_1(x)\|)^\varrho]^{1/\varrho} \leqq$$

$$\leqq [(\zeta_0(x)\|a_0(x)\|)^p+(t\zeta_1(x)\|a_1(x)\|^p)]^{1/p}.$$

This leads to "$\geqq$" in (8). But by considering the special decomposition $a_0=a$, $a_1=0$ or $a_0=0$, $a_1=a$, depending on the value of t, we see that the corresponding lower bound is attained. Thus we get effectively "$=$" in (8). Inserting next (8) in (7) we arrive at the formula

$$K_p(t, a) = \|a\|_{\min(\zeta_0, t\zeta_1)}. \tag{9}$$

Now every concave function φ admits the representation (see [9])

$$\varphi(\sigma) = C_0+C_1\sigma+\int\limits_0^\infty \min(1, \tau\sigma)\,d\xi(\tau)$$

where C_0 and C_1 are positive constants and ξ is a positive measure on $(0, \infty)$. It follows that

$$(H(\zeta_0, \zeta_1))^p = C_0\zeta_0^p + C_1\zeta_1^p + \int\limits_0^\infty (\min(\zeta_0, t\zeta_1))^p\,d\xi(t^p)$$

or, by (9), with $d\alpha(t)=d\xi(t^p)$,

$$\|a\|_\zeta = \left[C_0\|a\|^p_{\zeta_0}+C_1\|a\|^p_{\zeta_1}+\int\limits_0^\infty (K_p(t, a))^p\,d\alpha(t)\right]^{1/p}. \tag{10}$$

Since, by (9),

$$\|a\|_{\zeta_0} = \lim_{t\to\infty} K_p(t, a), \quad \|a\|_{\zeta_1} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} K_p(t, a),$$

(10) is a representation of the desired type (6).

Remark. In conclusion we remark that the above result probably also can be extended to the case when not only the weight function ζ but also p is a varied, à la STEIN—WEISS [12] (i.e. we have spaces $L^{p_0}_{\zeta_0}$ and $L^{p_1}_{\zeta_1}$ in place of just $L^p_{\zeta_0}$ and $L^p_{\zeta_1}$), by making use of the corresponding ideas in PEETRE [11].

References

[1] N. BOURBAKI, *Intégration* (Paris, 1952).
[2] M. M. DAY, The spaces L^p with $0<p<1$, *Bull. Amer. Math. Soc*, **46** (1940), 816—823.
[3] W. DONOGHUE, The interpolation of quadratic norms, *Acta Math.*, **118** (1967), 251—270.
[4] C. FOIAŞ—J. L. LIONS, Sur certains théorèmes d'interpolation, *Acta Sci. Math.*, **22** (1961), 269—2821.
[5] C. GOULAOUIC, Prolongements de foncteurs d'interpolation et applications, *Ann. Inst. Fourier*, **18** (1968), 1—98.
[6] P. KREÉ, Interpolation d'espaces qui ne sont ni normés, ni complets. Applications, *Ann. Inst. Fourier*, **17** (1968), 137—174.
[7] A. MONNA, Linear topological spaces over non-Archimedean valued fields, *Proceedings of a Conference on Local Fields, Driebergen*, 1967 (Berlin—Heidelberg—New York, 1967).
[8] J. PEETRE, On an interpolation theorem of Foiaş and Lions, *Acta Sci. Math.*, **25** (1964), 255—261.
[9] ——— On interpolation functions, *Acta Sci. Math.*, **27** (1966), 167—171.
[10] ——— On interpolation functions. II, *Acta Sci. Math.*, **29** (1968), 91—92.
[11] ——— A new approach in interpolation spaces (to appear in *Studia Math.*).
[12] E. M. STEIN—G. WEISS, Interpolation of operators with change of measures, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **87** (1958), 159—172.

(Received Nov. 16, 1968)

Об одной задаче Б. В. Гнеденко

А. П. БИКЯЛИС (Вильнюс), Й. МОДЬОРОДИ*) (Будапешт)

1. В последнее время появилось ряд работ посвященных исследованиям предельных закономерностей для сумм случайного числа независимых случайных слагаемых. Но, как недавно указал Б. В. Гнеденко [1], много интересных задач ещё не решено. Например, при каких условиях имеет место закон больших чисел для последовательностей сумм случайного числа ν_n первых слагаемых последовательности $\{\xi_n\}$ независимых случайных величин? Мы здесь будем заниматься случаем, когда слагаемые ξ_k и число слагаемых ν_n тоже независимы.

2. Рассмотрим последовательность серий

(1) $$\xi_{n1}, \xi_{n2}, \cdots, \xi_{n\nu_n} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

случайного числа ν_n независимых в каждой серии случайных величин. Предположим, что ν_n принимает целые положительные значения и не зависит от случайных величин n-той серии. Кроме того, пусть ν_n, $n=1, 2, \cdots$, имеют конечные математические ожидания.

Последовательность

(2) $$\zeta_{\nu_n}^{(n)} = \xi_{n1}+\xi_{n2}+\cdots+\xi_{n\nu_n} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

будем называть устойчивой, если существует последовательность постоянных $\{A_k^{(n)}\}$, $n, k=1, 2, \cdots$, таких, что случайные величины $\zeta_{\nu_n}^{(n)} - A_{\nu_n}^{(n)}$ по вероятности сходятся к нулю при $n\to\infty$.

Об устойчивости последовательности (2) гласит следующая

Теорема 1. *Для того чтобы последовательность* (2) *была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы при $n\to\infty$ выполнялись условия*

$$1)\quad M\left(\sum_{k=1}^{\nu_n}\int\limits_{|x|>1} dF_{nk}(x+m_{nk})\right)\to 0, \qquad 2)\quad M\left(\sum_{k=1}^{\nu_n}\int\limits_{|x|\le 1} x^2\, dF_{nk}(x+m_{nk})\right)\to 0.$$

*) J. Mogyoródi

Здесь $F_{nk}(x)$ — функция распределения случайной величины ξ_{nk}, а m_{nk} — медиана ξ_{nk}.

Доказательство. *Достаточность.* Положим

$$\xi'_{nk} = \xi_{nk} - m_{nk}; \quad \xi''_{nk} = \begin{cases} \xi'_{nk}, & \text{если} \quad |\xi'_{nk}| \leqq 1, \\ 0, & \text{если} \quad |\xi'_{nk}| > 1; \end{cases}$$

$$F'_{nk}(x) = P(\xi'_{nk} < x); \quad A_{\nu_n}^{(n)} = \sum_{k=1}^{\nu_n} (m_{nk} + M(\xi''_{nk}));$$

$$\zeta_{\nu_n}^{(n)\prime} = \sum_{k=1}^{\nu_n} \xi'_{nk}, \quad \zeta_{\nu_n}^{(n)\prime\prime} = \sum_{k=1}^{\nu_n} \xi''_{nk}.$$

Через B_n и $\bar{B}_n$ обозначим, соответственно, события $\zeta_{\nu_n}^{(n)\prime} = \zeta_{\nu_n}^{(n)\prime\prime}$ и $\zeta_{\nu_n}^{(n)\prime} \neq \zeta_{\nu_n}^{(n)\prime\prime}$ Нетрудно проверить, что

$$(3) \qquad P(\bar{B}_n) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\zeta_{\nu_n}^{(n)\prime} \neq \zeta_{\nu_n}^{(n)\prime\prime}, \nu_n = k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\zeta_k^{(n)\prime} \neq \zeta_k^{(n)\prime\prime}) P(\nu_n = k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(\nu_n = k) P\left(\sum_{j=1}^{k} \xi'_{nj} \neq \sum_{j=1}^{k} \xi''_{nj}\right) \leqq \sum_{k=1}^{\infty} P(\nu_n = k) \sum_{j=1}^{k} \int_{|x|>1} dF'_{nj}(x) =$$

$$= M\left(\sum_{j=1}^{\nu_n} \int_{|x|>1} dF'_{nj}(x)\right).$$

Для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ имеем

$$(4) \qquad P\left(|\zeta_{\nu_n}^{(n)} - A_{\nu_n}^{(n)}| > \varepsilon\right) = P\left(|\zeta_{\nu_n}^{(n)} - A_{\nu_n}^{(n)}| > \varepsilon, B_n\right) + P\left(|\zeta_{\nu_n}^{(n)} - A_{\nu_n}^{(n)}| > \varepsilon, \bar{B}_n\right).$$

С помощью неравенства Чебышева получаем

$$(5) \qquad P\left(|\zeta_{\nu_n}^{(n)} - A_{\nu_n}^{(n)}| > \varepsilon, B_n\right) = P\left(\left|\sum_{k=1}^{\nu_n} (\xi''_{nk} - M(\xi''_{nk}))\right| > \varepsilon, B_n\right) \leqq$$

$$\leqq P\left(\left|\sum_{k=1}^{\nu_n} (\xi''_{nk} - M(\xi''_{nk}))\right| > \varepsilon\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\nu_n = k) P\left(\left|\sum_{j=1}^{k} (\xi''_{nj} - M(\xi''_{nj}))\right| > \varepsilon\right) \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{\infty} P(\nu_n = k) \sum_{j=1}^{k} \int_{|x| \leqq 1} x^2 \, dF'_{nj}(x) = \frac{1}{\varepsilon^2} M\left(\sum_{k=1}^{\nu_n} \int_{|x| \leqq 1} x^2 \, dF'_{nk}(x)\right).$$

Из (3), (4) и (5) вытекает неравенство

$$P\left(|\zeta_{\nu_n}^{(n)} - A_{\nu_n}^{(n)}| > \varepsilon\right) \leqq M\left(\sum_{k=1}^{\nu_n} \int_{|x|>1} dF'_{nk}(x)\right) + \frac{1}{\varepsilon^2} M\left(\sum_{k=1}^{\nu_n} \int_{|x| \leqq 1} x^2 \, dF'_{nk}(x)\right),$$

а тем самым и достаточность условий Теоремы 1.

Необходимость. Предположим, что для последовательности $\{\zeta_{\nu_n}^{(n)}\}$ существует последовательность $\{A_k^{(n)}\}$ постоянных таких, что

$$\zeta_{\nu_n}^{(n)} - A_{\nu_n}^{(n)} \tag{6}$$

при $n \to \infty$ по вероятности сходится к нулю. Это утверждение равносильно тому, что характеристическая функция случайной величины (6) сходится к единице при $n \to \infty$, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} M\left(e^{it(\zeta_{\nu_n}^{(n)} - A_{\nu_n}^{(n)})}\right) = 1 \tag{7}$$

для каждого фиксированного t.

Пусть $f_{nk}(t)$ — характеристическая функция случайной величины ξ_{nk}, тогда

$$M\left(e^{it(\zeta_{\nu_n}^{(n)} - A_{\nu_n}^{(n)})}\right) = M\left(e^{-itA_{\nu_n}^{(n)}} \prod_{j=1}^{\nu_n} f_{nj}(t)\right).$$

Так как выполняется неравенство

$$\left|e^{-itA_{\nu_n}^{(n)}} \prod_{j=1}^{\nu_n} f_{nj}(t)\right| \leqq 1$$

то из (7) непосредственно вытекает, что случайная величина

$$\left|\prod_{j=1}^{\nu_n} f_{nj}(t)\right|$$

по вероятности сходится к единице при $n \to \infty$. Далее доказательство проводится точно так же, как и доказательство необходимости теоремы § 22 книги Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогорова [2].

Пользуясь утверждением Теоремы 1, рассмотрим закон больших чисел. Мы скажем, что для последовательности (2) выполняется закон больших чисел, если существует последовательность $\{C_n\}$ констант таких, что при $n \to \infty$ случайная величина $\zeta_{\nu_n}^{(n)} - C_n$ по вероятности сходится к нулю.

Теорема 2. *Для того чтобы при надлежащем подборе констант $\{C_n\}$ последовательность $\zeta_{\nu_n}^{(n)}$ была подчинена закону больших чисел, необходимо и достаточно, чтобы $n \to \infty$ выполнялись условия*

$$1') \quad M\left(\sum_{k=1}^{\nu_n} \int_{|x|>1} dF_{nk}(x+m_{nk})\right) \to 0, \qquad 2') \quad M\left(\sum_{k=1}^{\nu_n} \int_{|x|\leqq 1} x^2\, dF_{nk}(x+m_{nk})\right) \to 0,$$

$$3') \quad P\left(\left|\sum_{k=1}^{\nu_n} \left\{\int_{|x|\leqq 1} x\, dF_{nk}(x+m_{nk}) + m_{nk}\right\} - C_n\right| > \varepsilon\right) \to 0.$$

Доказательство. *Достаточность.* Имеем

$$P(|\zeta_{\nu_n}^{(n)}-C_n|\geqq\varepsilon)\leqq P\left(|\zeta_{\nu_n}^{(n)}-A_{\nu_n}^{(n)}|\geqq\frac{\varepsilon}{2}\right)+P\left(|A_{\nu_n}^{(n)}-C_n|\geqq\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

где

$$A_{\nu_n}^{(n)}=\sum_{k=1}^{\nu_n}\left\{m_{nk}+\int\limits_{|x|\leqq 1}x\,dF_{nk}(x+m_{nk})\right\}. \tag{8}$$

При выполнении условий 1′) и 2′) по Теореме 1 первый член в правой части этого неравенства сходится к нулю при $n\to\infty$. Условие 3 равносильно сходимости к нулю второго члена.

Необходимость. Предположим, что случайная величина $\zeta_{\nu_n}^{(n)}-C_n$ по вероятности сходится к нулю при $n\to\infty$. Повторяя доказательство необходимости условий Теоремы 1, получаем, что выполняются условия 1′) и 2′) настоящей теоремы. По Теореме 1 эти условия гарантируют сходимость по вероятности к нулю случайной величины $\zeta_{\nu_n}^{(n)}-A_{\nu_n}^{(n)}$ при $n\to\infty$. Здесь $A_{\nu_n}^{(n)}$ определено равенством (8). Следовательно, случайная величина $A_{\nu_n}^{(n)}-C_n$ необходимо должна сходиться по вероятности к нулю при $n\to\infty$, что и означает необходимость условия 3′). Теорема 2 полностью доказана.

Замечание. Первые два условия Теоремы 1 и 2 равносильны следующему условию:

$$\lim_{n\to\infty}M\left(\sum_{k=1}^{\nu_n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\,dF_{nk}(x+m_{nk})\right)=0$$

(ср. с леммой § 22 книги [2]).

Следующее утверждение дает необходимые и достаточные условия того, чтобы последовательность независимых случайных величин подчинялась закону больших чисел для сумм случайного числа случайных слагаемых.

Теорема 3. *Пусть имеем последовательность независимых случайных величин $\xi_1,\xi_2,\ldots$ и независимую от них случайную величину ν_n, принимающую целые положительные значения. Тогда для того, чтобы при данных постоянных $B_n>0$ существовала последовательность $\{C_n\}$ чисел таких что для каждого $\varepsilon>0$ имело место соотношение*

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{B_n}\sum_{i=1}^{\nu_n}\xi_i-C_n\right|>\varepsilon\right)=0$$

необходимо и достаточно, чтобы при фиксированном $\delta > 0$

$$1'')\qquad \lim_{n\to\infty} M\left(\sum_{k=1}^{\nu_n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{B_n^2+x^2}\, dF_k(x+m_k)\right) = 0,$$

$$2'')\qquad \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{\nu_n}\left(m_k + \int_{|x|\leqq B_n} x\, dF_k(x+m_k)\right) - C_n\right| > \delta\right) = 0.$$

Здесь $F_k(x)$ *и* m_k *— соответственно функция распределения и медиана случайной величины* ξ_k.

В случае одинаково распределенных $\xi_1, \xi_2, \ldots$ эти теоремы могут быть сформулированы следующим образом.

Теорема 4. *Если* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *— последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин и* $B_n \to \infty$, *то суммы*

$$\frac{1}{B_n}\sum_{i=1}^{\nu_n} \xi_i \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

устойчивы тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$1''')\qquad \lim_{n\to\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{B_n^2+x^2}\, dF(x+m)\right) M(\nu_n) = 0.$$

К последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *применим закон больших чисел при данных постоянных* $B_n > 0$ *и надлежащем подборе констант* C_n *тогда и только тогда, когда выполняется условие* 1''') *и*

$$2''')\qquad \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\nu_n}{B_n}\left(m + \int_{|x|\leqq B_n} x\, dF(x+m)\right) - C_n\right| > \delta\right) = 0.$$

Литература

[1] Б. В. Гнеденко, О связи теории суммирования независимых случайных величин с задачами теории массового обслуживания и теории надежности, *Revue roumaine math. pures et appl.*, **12** (1967), 1243—1353.

[2] B. V. Gnedenko — A. N. Kolmogorov, *Grenzverteilungen von Summen unabhängiger Zufallsgrößen* (Berlin, 1960).

(Поступило 19/IX/1968.)

Some results concerning regressive functions

By GÉZA FODOR and ATTILA MÁTÉ in Szeged

A function f defined on a set of ordinals and having ordinals as values satisfying $f(\alpha)<\alpha$ will be called regressive. As a matter of fact we shall not require the validity of this inequality for "small" ordinals — what we mean by this latter phrase will be quite clear later. In this paper we are going to examine some questions concerning the existence of regressive functions subjected to some additional conditions such as we shall require f to be one-to-one or divergent (for the definition see below) and we shall restrict the domain of f or occasionally its range too. To this end a review of some definitions and theorems in the theory of stationary sets is necessary.

1. Preliminary definitions and theorems. Let p be a cardinal number the cofinality p^* of which is $>\aleph_0$. A function f defined for some ordinals preceding p and having ordinals $<p$ as values is said to be *regressive* if it satisfies the inequality $f(\alpha)<\alpha$ in its domain whenever $\alpha>\alpha_0$, where α_0 is an ordinal $<p$ depending on f. The function f is called *divergent* if the set

$$\{\alpha : f(\alpha)\leqq\mu\}$$

is not cofinal to p whichever the ordinal $\mu<p$ may be.

The set $S\subseteq p$ is said to be *stationary* if there can not be defined any divergent regressive function on it. According to a celebrated result of W. NEUMER [1] this condition can be stated equivalently in a form that every *band* meets S. Here by band we mean any set cofinal to p which is closed in the topology induced by the natural ordering of p.

Considering the first form of the definition it is quite clear that the union of less than p^* non-stationary sets is not stationary, either. In the sequel, however, we shall need the following much stronger result, established by the first of the authors (see [2]):

Theorem 1. 1. *Let $\{S_\alpha\}_{\alpha<p^*}$ be a sequence of non-empty and non-stationary sets and suppose that the set of their initial elements, which are supposed to be distinct, is also non-stationary and cofinal to p. Then the union class $\bigcup_{\alpha<p^*} S_\alpha$ is not stationary either.*

2. If the regular cardinal number m is smaller than p^* then it is easily seen that the set of all ordinals preceding p and being cofinal to m is stationary. In fact, it is quite simple to verify that the mth element of each band belongs to this set. When, however, we consider the set S of all ordinals preceding p which have cofinalities greater than or equal to that of p, the situation is different. Indeed if we take the closure of a set of type p^* cofinal to p and containing only successor ordinals, then the band obtained will contain only ordinals of cofinalities smaller than p^*. This means that there exists a divergent regressive function defined on this set S. It can be shown, however, that there does not exist a divergent regressive function which maps ordinals into ordinals having greater cofinalities. More exactly the following theorem holds, where, of course, we tacitly suppose that p is a singular cardinal number.

Theorem 2. 1. *Let m be a regular cardinal number, $p^* \leqq m < p$. Let us denote by M the set of ordinals $<p$ which are cofinal to m and by N those cofinal to m or to some greater regular ordinals $<p$. Then there does not exist any divergent regressive function which maps M into N.*

For this theorem we first present what we think to be the most concise proof of it, and after that we outline another way leading to its proof, which, apart from the fact that it is in some respects more illuminating than the first proof, will employ some ideas useful later too.

Proof. Suppose, on the contrary, that there is a divergent regressive function f which maps M into N and let g be a divergent regressive function on N — such a function g *does* exist in view of the non-stationarity of N seen above. For any $\alpha \in N$ let $g'(\alpha)$ be the least element of M exceeding $g(\alpha)$. Then obviously we have $g'(\alpha) \leqq \alpha$. Now for any $\xi \in M$ we define the function $h(\xi)$ as $g'(f(\xi))$. This function is divergent, regressive, and maps M into itself; but the existence of such a function is a clear contradiction, since in view of the fact that the sets M and p have similar order types this would mean that there exists a divergent regressive function on the whole set p, which, however, is obviously stationary.

If we had required the existence of a divergent mapping f of M into N statisfying the regressivity condition $f(\alpha) < \alpha$ all over its domain, then it would have been easy to give a negative answer for this question. In fact if we consider the initial element of the set M we cannot find a smaller one in N. And yet, it might be of some interest that the essential point of the above theorem is the non-existence of such a mapping.

Indeed, on account of the non-stationarity of N we have the existence of a band B in the complement of N. Now, according to the fact that a band is always stationary, if we define a divergent regressive function f (in the sense used here generally) on the set M into the set N, it cannot always jump over the elements of B. More precisely said, if we define on B the function g by

$$g(\beta) = \min \{f(\alpha) : \alpha > \beta \ \& \ \alpha \in M\},$$

then g will not be regressive. So if β is large enough and such that $g(\beta) \geqq \beta$, then the first element α of M exceeding β cannot have an image $\beta \leqq f(\alpha) < \alpha$ such that $f(\alpha) \in N$, which, however, is required for all "large" α.

3. If S is a non-stationary set, then by definition there can be defined a divergent regressive function f on S. If p is a regular cardinal number, the divergence of f is an obvious restriction on the cardinalities of the inverse images

$$\{\alpha : f(\alpha) = \mu\};$$

indeed it says that these cardinalities are all smaller than p. In what follows we are going to investigate the question whether this condition can be strengthened in some way. This problem for singular p has also a meaning even if it has no such inspiration as in the regular case — thus in the sequel we shall not exclude the singular case, either. However we will return once more to this point later (cf. Section 5).

Since the behaviour of the above stated problem is different for $p = \aleph_1$ and for p chosen greater, we shall treat the first case separately. A lemma will be useful to this end.

Lemma 3. 1. *If ϑ is an arbitrary ordinal and A is the set of all successor ordinals preceding it, then the unique one-to-one function f defined on A such that $f(\alpha) < \alpha$ for any $\alpha \in A$, is the one which transforms each element of A into its immediate predecessor.*

The proof of this lemma can be easily carried out by transfinite induction on ϑ so we do not go into further details here.

This lemma can be simply translated into an assertion about regressive functions. Here we are interested only in the case $p = \aleph_1$.

Lemma 3. 2. *If A denotes the set of all successor ordinals before $\aleph_1$, then the essentially unique one-to-one regressive function f defined on A takes over each element of A into its immediate predecessor.*

Here the word "essentially" refers to the fact, that there are several functions which meet the requirements of the lemma but they differ only in their values assumed for small arguments. As a matter of fact, when talking about regressive functions, we are in no way concerned which values they take for small arguments. E.g. in the above lemma we only require f to be essentially one-to-one — it is quite clear what we mean by this. As to the proof of the lemma it uses the same idea as occurred in the second proof of Theorem 1. 1.

Proof. Let us temporarily denote by B the set of all limit ordinals less than $\aleph_1$ and for any $\beta \in B$ let

$$g(\beta) = \min\{f(\alpha):\alpha > \beta \ \&\ \alpha \in A\}.$$

Since the set B is obviously stationary, the function g cannot be regressive. Choose a $\beta \in B$ such that $g(\beta) \geqq \beta$. If β is chosen large enough, then Lemma 3.1 provides for the uniqueness of $f(\alpha)$ whenever $\alpha > \beta$.

Now we are ready to state our main result concerning the case $p = \aleph_1$:

Theorem 3.3. *If S is a non-stationary subset of $\aleph_1$ then there is a regressive function f on S which assumes each of its values at most twice. This bound is the best possible one.*

Proof. In view of Lemma 3.2 it is simple to verify the second assertion of the theorem. In fact if we choose the set S such that it contains all successor ordinals, then by the lemma we have that the values of f assumed on this part of S cover the whole set of the countable ordinals (i.e. the set of all ordinals less than $\aleph_1$). Thus the values assumed by f for limit ordinals will be assumed at least twice.

In order to prove the first assertion of the theorem it is sufficient to show that if S is a non-stationary set containing only limit ordinals, then there exists a one-to-one regressive function on it. This can be done as follows:

Let f be an arbitrary divergent regressive function on S, and consider its values assumed in any of the intervals $I_\tau = [\xi_\tau, \xi_{\tau+1})$ formed by two consecutive countable limit ordinals. According to the divergence of f it takes each ordinal at most countably many times as value; thus f assumes its value in I_τ at most countably many times. So we can modify the values of f assumed on the inverse image of I_τ so that they still remain in I_τ but are all different. If we carry out this step for all such intervals I_τ we obtain a one-to-one regressive function on S as required.

4. Now we are going to discuss the case $p > \aleph_1$. Since we admit also singular cardinal numbers as p here, we shall not be able in general to omit the adjective "divergent" from beside the expression "regressive function" as we sometimes did before. Nonetheless this question will be discussed later separately, and lastly we sall see that for other reasons this adjective can be omitted for singular p as well.

As said before, in the sequel p shall denote a cardinal number $> \aleph_1$ not cofinal to $\aleph_0$. This latter restriction on p is necessary since otherwise the theory of regressive functions becomes trivial and is of no interest for us in what follows.

The result we shall obtain says essentially that the cardinality conditions for the inverse images of regressive function cannot in general be strengthened. In order to show this in a precise form we first prove a lemma.

Lemma 4. 1. *For any regular cardinal number m satisfying* $\aleph_0 < m < p$ *there exists a non-stationary set such that any divergent regressive function defined on it assumes some large values at least m times.*

Here, of course, the word "large" expresses the fact that there are such values greater than any given ordinal less than p.

Proof. Let the band B be the closure of the set consisting of all ordinals $<p$ which are cofinal to m and let S be its complement; by definition S is not stationary. Now if f is any divergent regressive function on S then define the function g for $\beta \in B$ by

$$g(\beta) = \min \{f(\alpha) : \alpha > \beta \ \& \ \alpha \in S\}.$$

Since a band is a fortiori stationary, the function g is not regressive. Consider a large $\beta \in B$ with $g(\beta) \geqq \beta$ and denote by β' its immediate successor in B. It follows that the ordinal type of the interval $[\beta, \beta')$ is m, a regular cardinal number greater than $\aleph_0$; thus there cannot be defined on it a divergent regressive mapping it into itself — considering these concepts "relativized" to the given interval. And this latter assertion says exactly that there exists some ordinal μ in the interval $[\beta, \beta')$ such that the set

$$\{\alpha \in S : \beta < \alpha < \beta' \ \& \ f(\alpha) = \mu\}$$

has power m. Thus the lemma is proved.

Of course it does not make any difference whether or not we require m to be regular in the above lemma, unless p is the successor of a singular cardinal. As we shall see in Section 6, the regularity of m in this latter case is essential. Thus neither can we, in general, omit the regularity condition imposed on m from the following theorem, which is an extension of the preceding lemma.

Theorem 4. 2. *Suppose* $p > \aleph_1$ *and is not cofinal to* $\aleph_0$. *Then p has a non-stationary subset S such that, whichever the regular cardinal* $m < p$ *may be, each divergent regressive function defined on S assumes some large values at least m times.*

Proof. If p is the immediate successor of a regular cardinal, then the assertion of the theorem coincides with that of the preceding lemma. Thus the remaining cases are:

a) p is the immediate successor of a singular cardinal m;

b) p is a limit cardinal.

The proof in case a) is most simple. Indeed, for any regular cardinal number $m < p$ let S_m be a non-stationary set satisfying the requirements of the preceding lemma and denote by S their union if m runs over all such values. Since the number of values taken by m is less than $p = p^*$, the set S is non-stationary and thus meets all the requirements of the theorem.

The case b) will be contained in Theorem 5. 1 below, which will be verified in a way independent of what we have done up to now. But, for the sake of the more ambitious readers, we point out that this case can be dealt with in a manner similar to case a), as follows.

As is well known, p can be represented as the sum of p^* smaller regular cardinal numbers:

$$p = \bigcup_{\alpha < p^*} m_\alpha.$$

As before, for each m_α we designate a non-stationary set S_α satisfying the requirements of the above lemma with $m = m_\alpha$, i.e. such that any divergent regressive function on it assumes some large values at least m_α times.

Now if we took the union of all such sets S_α, then the obtained set S would have the required properties of the theorem except that it might be stationary. In view of Theorem 1. 1, however, this latter case can be avoided by taking the union only of some appropriate upper sections of the sets S_α.

Now we shall indicate more exactly how this may be done.

Select an arbitrary non-stationary set Σ of power p^* which is cofinal to p and adjoin in turn its elements to the sets S_α. Omit those elements in S_α preceding the corresponding adjoined elements of Σ; then in view of Theorem 1. 1, the union of all sets obtained this way will be non-stationary, and — as seen just now — it satisfies the other requirements of the theorem, too.

5. As pointed out earlier, Theorem 4. 2 remains true, with a slight change, even if we do not require the divergence of the regressive functions mentioned there, i.e. we have the following:

Theorem 5. 1. *Suppose the cardinal p is greater than, and not cofinal to $\aleph_0$. Then there exists a non-stationary subset S of it such that, whichever the regular cardinal $m < p$ may be, each regressive function on S assumes some values at least m times.*

The price of the omission of the divergence condition imposed on f is that, unlike in the earlier cases, here we cannot expect f to assume large values at all. A natural substitute for this still remains true; namely, as easily seen from the proof below, f assumes some values at least m times even if we confine ourselves to large arguments in the domain of f.

Since in case p is regular, the theorem is trivially true for any non-divergent regressive function, the assertion for regular p is contained in Theorem 4. 2: thus we have to deal only with singular cardinals in place of p. Nevertheless the proof given here will apply for any limit cardinal so as to fulfil our earlier promise of giving an alternative proof of Theorem 4. 2 in this critical case.

Proof. If p is a limit cardinal, then the cardinal numbers preceding it form a band; select its complement as the non-stationary set S. Let f be an arbitrary regressive function on S and choose m to be a sufficiently large successor cardinal. Then f will be regressive on the lower section of S formed by its elements contained in m, too. This set, however, is stationary in m and hence the function f cannot be divergent here. This means that for some $\mu < m$ the set

$$\{\alpha : \alpha < m \ \&\ f(\alpha) = \mu\}$$

has power m, which implies the assertion of the theorem.

6. We mentioned earlier that Lemma 4. 1 fails for singular m. In fact, the following theorem is true.

Theorem 6. 1. *Let m be a singular cardinal number and let p be its immediate successor. If S is a non-stationary subset of p, then there exists a regressive function f on it which takes each value less than m times.*

Since p is obviously regular, such a function f must be divergent. The proof of the theorem might be compared to that of the first assertion in Theorem 3. 3.

Proof. Let M denote the closure of the set formed by all ordinals $<p$ having endings similar to m — i.e. each of which has some appropriate upper section of type m. Obviously, M is a band.

First we want to show that the assertion of the theorem is valid for the set $S = p - M$ which is now clearly non-stationary.

To this end let us consider any of the intervals $I_\tau = (\xi_\tau, \xi_{\tau+1})$ formed by two consecutive elements of M. According to the singularity of m, such an interval can be decomposed as the sum of a number less than m of its subsets each of which has cardinality $<m$. Now define the regressive function f_τ on I_τ as follows: transform every element of such a subset onto its initial element with the exception of this latter one the image of which will be ξ_τ. If we consider a function f_τ obtained this way on each of the intervals I_τ as a part of a function f defined on the whole set S, this latter function will meet all the requirements of the theorem.

Thus what now remains for us to verfy is that the assertion of the theorem holds for any non-stationary subset of M. For this aim we modify slightly the definition of the above intervals I_τ inasmuch as we adjoin to them their left endpoints, i.e. we put $I_\tau = [\xi_\tau, \xi_{\tau+1})$.

Let us now be given a non-stationary subset S of M and a divergent regressive function f defined on it. If I_τ is any of the considered intervals, then clearly its whole inverse image under f has power $\leqq m$; thus, in view of the singularity of m, we can modify the values in it assumed by f such that they still remain in I_τ but each of them will be taken less than m times. Since the disjoint intervals I_τ altogether cover the entire set p, by carrying out these modifications of the function f in all of the considered intervals, the obtained function will satisfy all the requirements of the theorem.

7. What now remains concerns our "standard" idea. It can be formulated in a lemma and why we did not do it before is that we thought that it was more simple to carry out the proof in each particular case. Nonetheless, for the sake of its own interest, we now bring it into the limelight:

Lemma 6. 1. *If B is a stationary set in p and f is a divergent regressive function defined on some subset of p, then f cannot jump over all the large elements of B, i.e. there are some large β in B such that for every α in the domain of f and exceeding β we have $f(\alpha) \geqq \beta$.*

We omit the proof.

References

[1] W. Neumer, Verallgemeinung eines Satzes von Alexandroff und Urysohn, *Math. Zeitschr.*, **54** (1951), 254—261.

[2] G. Fodor, Eine Bemerkung zur Theorie der regressiven Funktionen, *Acta Sci. Math.*, **17** (1956), 139—142.

BOLYAI INSTITUTE
SZEGED, HUNGARY

(Received December 1, 1968)

On power series with positive coefficients

By RAIS SHAH KHAN in Aligarh (India)

In this note we prove:

Theorem. *Let* $F(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,\ a_k \geqq 0,\ 0 \leqq x < 1,\ S_n=\sum_{k=0}^{n} a_k$, *and* $r<1$. *Then, for* $1 \leqq p \leqq \infty$,

$$\left(\int_0^1 (1-x)^{-r}(F(x))^p\,dx\right)^{1/p} < \infty$$

if and only if

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} S_n^p\right)^{1/p} < \infty.^{1)}$$

This theorem reduces for $r=0$ to a theorem of ASKEY [1] and for $p=1$ to a theorem of HEYWOOD [2]. The method of proof follows that of ASKEY.

Proof. We may assume $1<p<\infty$, as the two limit cases are trivial.

Necessity. We write $1-x=y$. Then by virtue of the fact that $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ $(n=1, 2, \ldots)$ is an increasing sequence, we have for $\frac{1}{n+1} \leqq y \leqq \frac{1}{n}$, $n \geqq 2$

$$F(1-y) \geqq \sum_{k=0}^{n} a_k(1-y)^k \geqq \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \sum_{k=0}^{n} a_k,$$

i.e.

$$F(1-y) \geqq AS_n \quad \text{for} \quad \frac{1}{n+1} \leqq y \leqq \frac{1}{n} \qquad (n=2, 3, \ldots),$$

[1]) For $p=\infty$ one has to take the limits as $p\to\infty$, i.e. $\sup_{0\leqq x<1} F(x)$ and $\sup_{1\leqq n<\infty} S_n$.

where A is a positive constant not necessarily the same at each occurrence. Thus

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} S_n^p \leqq A \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} y^{-r} S_n^p \, dy = A \int_{\frac{1}{2}}^{1} y^{-r} S_1^p \, dy + A \sum_{n=2}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} y^{-r} S_n^p \, dy \leqq$$

$$\leqq A + A \int_0^{\frac{1}{2}} y^{-r} (F(1-y))^p \, dy \leqq A + A \int_0^1 (1-x)^{-r} (F(x))^p \, dx < \infty.$$

Sufficiency. We have

$$\int_0^1 (1-x)^{-r} (F(x))^p \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} y^{-r} (F(1-y))^p \, dy =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} y^{-r} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (1-y)^k \right)^p dy \leqq A \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} y^{-r} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^k \right)^p dy \leqq$$

$$\leqq A \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^k \right)^p \leqq A \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=nj}^{n(j+1)} a_k \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^k \right)^p \leqq$$

$$\leqq A \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{nj} \sum_{k=nj}^{n(j+1)} a_k \right)^p \equiv \Sigma_1.$$

Since $\frac{1}{2} \geqq \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \geqq \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+1}$ for $n = 1, 2, \ldots;$ we obtain that

$$\Sigma_1 \leqq A \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \sum_{k=0}^{n(j+1)} a_k \right)^p \leqq A \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-\frac{i}{2}} \cdot 2^{-\frac{i}{2}} \sum_{k=0}^{ni} a_k \right)^p \leqq$$

$$\leqq A \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-\frac{ip'}{2}} \right)^{\frac{p}{p'}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-\frac{ip}{2}} S_{ni}^p \right) \leqq A \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-\frac{ip}{2}} S_{ni}^p =$$

$$= A \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-\frac{ip}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} S_{ni}^p = A \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-\frac{ip}{2}} \cdot i^{-r+2} \sum_{n=1}^{\infty} (in)^{r-2} S_{ni}^p \leqq A \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} S_n^p < \infty.$$

The proof is thus completed.

I wish to express my gratitude to Dr. S. M. Mazhar for his valuable guidance.

Added in proof. The author has recently observed that the theorem remains true also for $0<p<1$.

References

[1] R. ASKEY, L^p behavior of power series with positive coefficients, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **19** (1968), 303—305.

[2] P. HEYWOOD, Integrability theorems for power series and Laplace transforms. I, *J. London Math. Soc.*, **30** (1955), 302—310.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
ALIGARH MUSLIM UNIVERSITY
ALIGARH (INDIA)

(Received July 1, 1968)

Note on power series with positive coefficients

By LÁSZLÓ LEINDLER in Szeged

We prove the following

Theorem. *Let $\lambda(t)$ be a positive, non-increasing, integrable function on the interval $0<t\leqq 1$ such that $\lambda\left(\frac{1}{n+1}\right)=O\left(\lambda\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, and let $F(x)$ be defined on the interval $0\leqq x<1$ by the series $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ with $a_k\geqq 0$. Further let $1\leqq p\leqq\infty$. Then we have*

$$\left\{\int_0^1 \lambda(1-x)(F(x))^p\,dx\right\}^{1/p}<\infty \tag{1}$$

if and only if

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\lambda\left(\frac{1}{n}\right)n^{-2}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)^p\right\}^{1/p}<\infty. \tag{2}$$

If $\lambda(t)=t^{-r}$ $(r<1)$, this theorem reduces to a theorem of RAIS SHAN KHAN [3], which in its turn includes a theorem of ASKEY ([1], $r=0$) and a theorem of HEYWOOD ([2], $p=1$).

The proof is similar to that of the mentioned theorems.

Proof. We may assume $1\leqq p<\infty$, since under the assumptions of the theorem both (1) and (2) mean for $p=\infty$ that the series $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converges. First we show that (1) implies (2). Set $y=1-x$ and $A_n=\sum_{k=0}^{n} a_k$. Since $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ is an increasing sequence, we have for $\frac{1}{n+1}\leqq y\leqq\frac{1}{n}$ $(n\geqq 2)$:

$$F(1-y)\geqq\sum_{k=0}^{n} a_k(1-y)^k\geqq\sum_{k=0}^{n} a_k\left(1-\frac{1}{n}\right)^k\geqq\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\sum_{k=0}^{n} a_k\geqq\frac{1}{4}A_n.$$

Using this we obtain for $m \geqq 2$:

$$\sum_{n=1}^{m} \lambda\left(\frac{1}{n}\right) n^{-2} A_n^p \leqq 2 \sum_{n=1}^{m} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \lambda(y)\, dy\, A_n^p \leqq 2\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1} \lambda(y) A_1^p\, dy + \sum_{n=2}^{m} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \lambda(y) A_n^p\, dy\right) \leqq$$

$$\leqq O(1) + 8 \sum_{n=2}^{m} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \lambda(y)(F(1-y))^p\, dy \leqq O(1) + 8 \int_0^1 \lambda(1-x)(F(x))^p\, dx.$$

This proves that (2) follows from (1).

The proof of the inverse statement is a bit longer. We have for $m \geqq 1$

$$\text{(3)} \qquad \int_0^{1-\frac{1}{m+1}} \lambda(1-x)(F(x))^p\, dx = \sum_{n=1}^{m} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \lambda(y)(F(1-y))^p\, dy =$$

$$= \sum_{n=1}^{m} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \lambda(y)\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (1-y)^k\right)^p dy \leqq \sum_{n=1}^{m} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \lambda(y)\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^k\right)^p dy \leqq$$

$$\leqq O(1) \sum_{n=1}^{m} \lambda\left(\frac{1}{n}\right) n^{-2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^k\right)^p.$$

Since $\frac{1}{2} \geqq \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n \geqq \left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{n+1}$ for $n = 1, 2, \ldots,$ we have

$$\text{(4)} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^k \leqq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=nj}^{n(j+1)} a_k \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^k \leqq$$

$$\leqq \sum_{j=0}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{nj} \sum_{k=nj}^{n(j+1)} a_k \leqq 2 \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} A_{ni}.$$

If $p > 1$, then we have

$$\text{(5)} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} A_{ni} \leqq \left(\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-\frac{ip'}{2}}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-\frac{ip}{2}} A_{ni}^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Hence and from (3), (4), and (5) we deduce for $m \geqq 1$ and $1 \leqq p < \infty$, that

$$\int_0^{1-\frac{1}{m+1}} \lambda(1-x)(F(x))^p\,dx \leqq O(1) \sum_{n=1}^{m} \lambda\left(\frac{1}{n}\right) n^{-2} \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-\frac{ip}{2}} A_{ni}^p \leqq$$

$$\leqq O(1) \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-\frac{ip}{2}} \sum_{n=1}^{m} \lambda\left(\frac{1}{n}\right) n^{-2} A_{ni}^p \leqq$$

$$\leqq O(1) \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-\frac{ip}{2}} i^2 \sum_{n=1}^{m} \lambda\left(\frac{1}{ni}\right) (ni)^{-2} A_{ni}^p \leqq O(1) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda\left(\frac{1}{n}\right) n^{-2} A_n^p.$$

Thus (2) implies (1), and this completes the proof.

References

[1] R. Askey, L^p behavior of power series with positive coefficients, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **19** (1968), 303—305.

[2] P. Heywood, Integrability theorems for power series and Laplace transforms. I, *J. London Math. Soc.*, **30** (1955), 302—310.

[3] Rais Shah Khan, On power series with positive coefficients, *Acta Sci. Math.*, **30** (1969), 255—257.

(Received October 1, 1968)

On local properties of pseudo-differential operators

By VIOREL BARBU in Iaşi (Roumania)

Pseudo-differential operators have been developed by KOHN—NIRENBERG [1] and L. HÖRMANDER [3]. VOLEVIČ [4] considers a wider class of symbols which generalizes the differential operators of constant strength. Our aim is to complete the results of [4] by studying the Gevrey regularity of pseudo-differential operators.

1. Notations

We set $D_j = -i\,\partial/\partial x_j$, $\partial_j=\partial/\xi_j$ for $1\leqq j\leqq n$, and for each n-tuple $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ we set $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\dots D_n^{\alpha_n}$, $\partial^\alpha=\partial_1^{\alpha_1}\dots\partial_n^{\alpha_n}$, $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}$, $\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\dots\xi_n^{\alpha_n}$, and $|\alpha|=\sum_1^n\alpha_j$. By S we denote the space C^∞ of complex valued functions $\varphi(x)$ such that $\sup_{x\in R^n}|x^\beta D^\alpha\varphi(x)|<\infty$ for all multi-indices α and β. For real s we introduce the norm

$$\|u\|_s=\left((2\pi)^{-n}\int|\hat u(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s\,d\xi\right)^{1/2}, \tag{1}$$

where $\hat u$ is the Fourier transform of u. Let H^s the space obtained by the completion of S in this norm. We set

$$H^{-\infty}=\bigcup_{s=-\infty}^{\infty}H^s.$$

If K is any compact set of R^n, we shall use the notations

$$\|u,K\|=\left(\int_K|u(x)|^2\,dx\right)^{1/2},\quad \|u,K\|_\infty=\operatorname*{ess\,sup}_K|u(x)|.$$

A function $u(x)\in C^\infty$ defined on an open subset $\Omega\subset R^n$ is said to be hypoanalytic of class ϱ $(1\leqq\varrho<\infty)$ if for any compact set $K\subset\Omega$ there exists a constant M such that for any multi-index α the inequality

$$\|D^\alpha u,K\|_\infty\leqq M^{|\alpha|+1}\Gamma(\varrho|\alpha|) \tag{1.2}$$

holds, where Γ is Euler's function. The Gevrey class $G^\varrho(\Omega)$ is the space of all functions of class ϱ on Ω. If $\varrho>1$, $G_0^\varrho(\Omega)$ will denote the space $C_0^\infty(\Omega)\cap G^\varrho(\Omega)$.

2. Pseudo-differential operators. Pseudo-local properties

We consider pseudo-differential operators of the form

$$Au(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{i(x,\xi)}a(x,\xi)\hat{u}(\xi)\,d\xi \qquad (u\in S) \tag{2.1}$$

or

$$(Au)^{\wedge}(\xi) = (2\pi)^{-n}\int \hat{a}'(\xi-\eta,\eta)\hat{u}(\eta)\,d\eta + a(\xi)\hat{u}(\xi) \qquad (u\in S), \tag{2.1$'$}$$

with the symbol $a(x,\xi)=a(\xi)+a'(x,\xi)$, where $a'(x,\xi)$, as a function of x, vanishes at ∞. Here $\hat{a}'(\eta,\xi)$ denotes the Fourier transform of $a'(x,\xi)$ with respect to x.

Concerning the symbol $a(x,\xi)\in C^\infty(R^n\times R^n)$ we assume that there are positive constants m, M, C independent of α such that

$$|\partial^\alpha a(\xi)| \leqq C^{|\alpha|}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|/\varrho}, \tag{I}$$

$$\int |D^\beta\partial^\alpha a'(x,\xi)|\,dx \leqq M^{|\alpha|+|\beta|+1}\Gamma(\varrho|\beta|)(1+|\xi|)^{m-|\alpha|/\varrho}. \tag{II}$$

Theorem 1. *Let $a(x,\xi)$ be a C^∞ symbol satisfying* I, II *and let A be the associated pseudo-differential operator. Suppose that $u\in H^\infty\cap G^\varrho$. Then $Au\in G^\varrho(\Omega)$.*

Proof. We choose $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ equal to 1 in a set $\bar{\Omega}'\subset\Omega$. We may suppose that $u\in H^\sigma$. We put

$$a_{\alpha,\beta}(x,\xi) = D^{\alpha-\beta}a(x,\xi)$$

and denote by $A_{\alpha,\beta}$ the operators of the form (2. 1) with associated symbols $a_{\alpha,\beta}(x,\xi)$. We have

$$\varphi D^\alpha Au = \sum_{|\beta|\leqq|\alpha|}\binom{\beta}{\alpha}A_{\alpha\beta}(\varphi D^\beta u) + \sum_{|\beta|\leqq|\alpha|}\binom{\beta}{\alpha}[A_{\alpha\beta};\varphi](D^\beta u) \tag{2.2}$$

where $[A_{\alpha\beta};\varphi]$ is the commutator of $A_{\alpha\beta}$ with φ.

The essential point in the proof is the estimation of $\|[A_{\alpha\beta};\varphi]D^\beta u\|$, where $\|\ \|$ denotes the L^2 norm. For $\alpha\neq\beta$ and $u, v\in S$ we have

$$\begin{aligned}&([A_{\alpha\beta};\varphi](D^\beta u, v)) = \\ &= (2\pi)^{-n}\iiint (D^\beta u)^{\wedge}(\xi)\hat{\varphi}(\tau-\xi)\big(\hat{a}'_{\alpha\beta}(\tau-\eta,\tau)-\hat{a}'_{\alpha\beta}(\tau-\eta,\xi)\big)\hat{v}(\eta)\,d\xi\,d\eta\,d\tau.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Using a finite series expansion for the difference in the integral, and substituting this expression in (2. 3), we find

$$\begin{aligned}&\big([A_{\alpha\beta};\varphi](D^\beta u), v\big) = \\ &= \sum_{|\gamma|\leqq N}(1/\gamma!)\iint (D^\beta u D^\gamma\varphi)^{\wedge}(\tau)\hat{v}(\eta)(D^{\alpha-\beta}\partial^\gamma a')^{\wedge}(\tau-\eta,\eta)\,d\eta\,d\tau + \\ &\quad + (2\pi)^{-n}\iiint (D^\beta u)^{\wedge}(\xi)\hat{\varphi}(\tau-\xi)R_N(\tau-\eta,\xi)\hat{v}(\eta)\,d\xi\,d\eta\,d\tau,\end{aligned} \tag{2.4}$$

where R_N denotes the remainder: $(1/N!)^N(\xi-\tau)(\partial^N a')^\wedge(\tau-\eta,\theta)$. From II it follows by partial integration that for any multi-indices α, γ we have

$$(2.5)\quad |D^\alpha\partial^\gamma \hat{a}'(\tau-\eta,\tau)| \leqq M^{|\alpha|+|\gamma|+1}\Gamma(\varrho|\alpha|+N_1)(1+|\tau-\eta|)^{-N_1}(1+|\tau|)^{m-|\gamma|/\varrho}$$

for every non-negative N_1. From (2.4) it follows

$$(2.6)\qquad |([A_{\alpha\beta};\varphi]D^\beta u, v)| \leqq M^{|\alpha-\beta|+N+1}\Gamma(\varrho|\alpha-\beta|)\cdot$$

$$\cdot\sum_{0\leqq|\gamma|\leqq N}(1/\gamma!)\|D^\beta u D^\gamma\varphi\|_{m-|\gamma|/\varrho}\|v\| + \int K(\xi,\eta)(1+|\xi|)^{\sigma-|\beta|}|D^\beta\hat{u}(\xi)|\,|\hat{v}(\eta)|\,d\xi\,d\eta$$

with

$$K(\xi,\eta) = (2\pi)^{-n}\sum_{|\gamma|=N}(1/\gamma!)\cdot$$

$$\cdot\int\frac{(1+|\xi|)^{|\beta|-\sigma}((1-\Delta)^p\varphi)^\wedge(\xi-\tau)\cdot(\xi-\tau)^\gamma((1-\Delta)^q D^{\alpha-\beta}\partial^\gamma a')^\wedge(\tau-\eta)}{(1+|\xi-\tau|^2)^p(1+|\tau-\eta|^2)^q}\,d\tau,$$

where p, q are non-negative numbers. Using the inequality

$$\frac{1+|\xi|}{2(1+|\xi-\eta|)} \leqq 1+|\theta| \leqq (1+|\xi|)(1+|\xi-\tau|)$$

we get

$$(2.7)\qquad |K(\xi,\eta)| \leqq$$

$$\leqq (1/N!)M^{|\alpha-\beta|+1}\Gamma(\varrho|\alpha-\beta|)(1+|\xi|)^{|\beta|-\sigma-N/\varrho+m}(1+|\eta|)^{-n-1}\|\varphi\|_{N(1+1/\varrho)+p},$$

for p, q sufficiently large. If we choose N so that

$$\varrho(|\beta|-\sigma+m+n+1) < N \leqq \varrho(|\beta|-\sigma+m+n+1)+1$$

we obtain

$$(2.8)\qquad |K(\xi,\eta)| \leqq (1/N!)M^{|\alpha-\beta|+1}\Gamma(\varrho|\alpha-\beta|)(1+|\xi|)^{-n-1}(1+|\eta|)^{-n-1}.$$

To prove Theorem 1 we first suppose that $\varrho>1$. Thus we may choose $\varphi\in G_0^d$ so that $1<d<2\varrho/(\varrho+1)$. Applying Schur's lemma (see HÖRMANDER [3]) from (2.6) and (2.8) we get

$$(2.9)\qquad \|[A_{\alpha\beta},\varphi]D^\beta u\| \leqq$$

$$\leqq M^{|\alpha-\beta|+1}\Gamma(\varrho|\alpha-\beta|)\sum_{|\gamma|\leqq N}1/\gamma!\,\|D^\beta u D^\gamma\varphi\|_{m-|\gamma|/\varrho} + M^{|\alpha|+1}\Gamma(\varrho|\alpha|)\|u\|_\sigma.$$

with N defined above and for $u, v\in S$. Similarly it follows

$$(2.10)\qquad \|A_{\alpha\beta}(\varphi D^\beta u)\| \leqq M_1^{|\alpha-\beta|+1}\Gamma(\varrho|\alpha-\beta|)\|\varphi D^\beta u\|_m.$$

Let now $u\in H^\sigma\cap C^\infty(\Omega)$. Combining (2.2), (2.9) and (2.10) we get

$$(2.11)\quad \|\varphi D^\alpha Au\| \leqq \sum_{|\beta|\leqq|\alpha|}M^{|\alpha-\beta|+1}\Gamma(\varrho|\alpha-\beta|)\sum_{|\gamma|\leqq N}1/\gamma!\,\|D^\beta u D^\gamma\varphi\|_{m-|\gamma|/\varrho}+$$

$$+M^{|\alpha|+1}\Gamma(\varrho|\alpha|)\|u\|_\sigma.$$

Let ψ be a G_0^d-function with its support in Ω and equal to 1 on the support of φ. Clearly $D^\gamma\varphi D^\beta(u\psi) = D^\gamma\varphi D^\beta u$. Using the inequality (see HÖRMANDER [2])

$$\|D^\beta u D^\gamma \varphi\|_{m-|\gamma|/\varrho} \leqq C\|D^\beta(u\psi)\|_{m-|\gamma|/\varrho}\|D^\gamma\varphi\|_{|m-|\gamma|/\varrho|}$$

and the fact that $u\in G^\varrho(\Omega)$ from (2. 11) we deduce

$$\|\varphi D^\alpha Au\| \leqq M^{|\alpha|+1}\Gamma(\varrho|\alpha|). \tag{2. 12}$$

Hence

$$\|D^\alpha Au, \bar\Omega'\|_\infty \leqq M_1^{|\alpha|+1}\Gamma(\varrho|\alpha|). \tag{2. 13}$$

Since Ω' is an arbitrary open subset of Ω, this completes the proof. Now we suppose $\varrho=1$. We choose a sequence $\{\varphi_k\}\in C_0^\infty(\Omega)$ such that $\varphi_k=1$ on $\bar\Omega'$ and

$$|D^\alpha\varphi_k(x)| \leqq C^{|\alpha|+1}k^{|\alpha|} \quad \text{for} \quad |\alpha|\leqq k. \tag{2. 14}$$

Taking $\varphi=\varphi_{2N}$ in (2. 6), from (2. 14) it follows

$$\|[A_{\alpha\beta}, \varphi_{2N}]D^\beta u\| \leqq M^{|\alpha-\beta|+1}\Gamma(|\alpha-\beta|)\sum_{|\gamma|\leqq N} 1/\gamma!\,\|D^\beta u D^\gamma\varphi_{2N}\|_{m-|\gamma|} + \tag{2. 15}$$
$$+M^{|\alpha|}\Gamma(|\alpha|)\|u\|_\sigma,$$

where $|\beta|-\sigma+m+n+1<N\leqq|\beta|-\sigma+m+n+2$. As above we obtain

$$\|\varphi_{2N}D^\alpha Au\| \leqq \sum_{|\beta|\leqq|\alpha|} M^{|\alpha-\beta|+1}\Gamma(|\alpha-\beta|)\sum_{|\gamma|\leqq N}\|D^\beta u D^\gamma\varphi_{2N}\|_{m-N} + \tag{2. 16}$$
$$+M^{|\alpha|+1}\Gamma(|\alpha|)\|u\|_\sigma.$$

Let $\psi_{2N}\in C_0^\infty(\Omega)$ equal to 1 in the support of φ_{2N} such that

$$|D^\alpha\psi_{2N}(x)| \leqq C^{|\alpha|+1}2N^{|\alpha|} \quad \text{for} \quad |\alpha|\leqq 2N.$$

Then it follows

$$\|\varphi D^\alpha Au\| \leqq \tag{2. 17}$$
$$\leqq \sum_{|\beta|\leqq|\alpha|} M^{|\alpha-\beta|+1}\Gamma(|\alpha-\beta|)\sum_{|\gamma|\leqq N}(1/\gamma!)\,\|D^\beta(u\psi_{2N})\|_{m-|\gamma|}\,\|D^\gamma\varphi_{2N}\|_{|m-|\gamma||} +$$
$$+M^{|\alpha|+1}\Gamma(|\alpha|)\|u\|_\sigma.$$

This implies that

$$\|D^\alpha Au, \bar\Omega'\|_\infty \leqq M^{|\alpha|+1}|\alpha|! \tag{2. 18}$$

Hence the proof of Theorem 1 is completed.

Remark. Let $K\in D'(R^n\times R^n)$ be a distribution defined by

$$K(F) = (2\pi)^{-n}\int e^{i(x,\xi)}a(x,\xi)F(x,\xi)\,dx\,d\xi \quad \text{for} \quad F\in C_0^\infty(R^n\times R^n), \tag{2. 19}$$

where $\hat{F}(x, \xi) = \int e^{-i(x,\xi)} F(x, y)dy$. Obviously the distribution K is the kernel of a pseudo-differential operator A, i.e.

$$(Au, v) = K(u \otimes v) \quad (u, v \in S).$$

It is easily seen that under assumptions I, II the kernel K is ϱ-hypoanalytic in the domain $\{(x, y) \in R^n \times R^n;\ x \neq y\}$.

3. Hypoelliptic pseudo-differential operators

Let $a(x, \xi)$ be the symbol considered above. Assume there are non-negative constants M_1, N_1 independent of α, β such that

$$\text{(III)} \qquad |a(\xi) - a(\eta)| \leqq M(1 + |\xi - \eta|)^{N_1}(1 + |\xi|)^{m-\sigma},$$

$$\text{(IV)} \qquad \int |D^\alpha a'(x, \xi) - D^\alpha a'(x, \eta)|\, dx \leqq M_1^{|\alpha|+1}\Gamma(\varrho|\alpha|)(1 + |\xi - \eta|)^N(1 + |\eta|)^{m-\sigma}$$

with a real $\sigma \geqq 2$, and

$$\text{(V)} \qquad |a(\xi)|, \quad |a'(x, \xi)| \geqq C(1 + |\xi|)^m$$

for $|\xi|$ sufficiently large.

Theorem 2. *Let $a(x, \xi)$ be a C^∞ symbol which satisfies the assumptions* I—V, *and let Ω be an open subset of R^n. Then $u \in H^{-\infty}$ and $Au \in G^\varrho(\Omega)$ imply $u \in G^\varrho(\Omega)$ $(\varrho \geqq 2)$.*

Suppose that $|a(x, \xi)|$, $|a(\xi)| \geqq C(1 + |\xi|)^m$ for $|\xi| \geqq R$. In the following $\chi(\xi)$ will denote a C^∞ non-negative function which is equal to 1 for $|\xi| \geqq R + 1$ and vanishes for $|\xi| < R$. Consider the symbol $e(x, \xi) = \chi(\xi)/a(x, \xi)$ and denote by E and G the pseudo-differential operators with the associated symbols $e(x, \xi)$ and $\chi(\xi)$. Setting $T = EA - G$ and $T_1 = I - G$ we decompose u as

$$\text{(3. 1)} \qquad u = EAu - Tu + T_1 u.$$

Lemma 1. *For any real s there exists a non-negative constant C_s such that*

$$\text{(3. 2)} \qquad \|Eu\|_s \leqq C_s \|u\|_{s-m} \quad \textit{for} \quad u \in S,$$

$$\text{(3. 3)} \qquad \|Tu\|_s \leqq C_s \|u\|_{s-\sigma} \quad \textit{for} \quad u \in S,$$

and

$$\text{(3. 4)} \qquad \|[A_{\alpha\beta}, \varphi]u\|_s \leqq C_s \|u\|_{s+m-2} \quad \textit{for} \quad u \in S, \quad \textit{where} \quad \varphi \in C_0^\infty(R^n).$$

Proof. To prove (3. 2) we remark that the symbol $e(x, \xi)$ satisfies conditions (I), (II) with m replaced by $-m$. The estimates (3. 3) and (3. 4) follow in a similar way as (2. 9).

Proof of Theorem 1. Under our conditions the operator A is hypo-elliptic (see VOLEVIČ [4]); hence we may assume that $u \in C^\infty(\Omega) \cap H^t$. Since the statement of the theorem is local it is sufficient to prove that every point in Ω has an open neighborhod ω in which $u \in G^\varrho$. In the following we denote by ω_ε the set of all points of ω at a distance $> \varepsilon$ from $C\omega$. Let $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\omega)$ be fixed functions such that $\operatorname{supp} \varphi \subset \omega_{2\varepsilon}$, $\operatorname{supp} \psi \subset \omega_\varepsilon$, and $\varphi = 1$ in $\omega_{3\varepsilon}$, $\varphi = 1$ in $\omega_{2\varepsilon}$. For $u_1 = u\psi$ we get from (2. 2) and (3. 1):

$$(3.\ 5) \qquad \varphi D^\alpha u_1 = E\varphi D^\alpha A u_1 - \sum_{|\beta|<|\alpha|} \binom{\beta}{\alpha} EA_{\alpha\beta}(\varphi D^\beta u_1) - T(\varphi D^\alpha u_1) +$$

$$+ \sum_{|\beta| \leqq |\alpha|} \binom{\beta}{\alpha} E[A_{\alpha\beta}, \varphi] D^\beta u_1 + T_1(\varphi D^\alpha u_1).$$

We remark that

$$(3.\ 6) \qquad \varphi D^\alpha A u_1 = \varphi D^\alpha A u - \varphi D^\alpha A(1-\psi)u.$$

Since $(1-\psi)u = 0$ on $\omega_{2\varepsilon}$ it follows from Theorem 1 that $A(1-\psi)u \in G^\varrho(\omega_{2\varepsilon})$. This implies that

$$(3.\ 7) \qquad \|\varphi D^\alpha A u_1\| \leqq M^{|\alpha|+1} \Gamma(\varrho|\alpha|).$$

From (2. 10), (3. 2), (3. 3), and (3. 4) we obtain that

$$(3.\ 8) \qquad \|EA_{\alpha\beta}(\varphi D^\beta u_1)\| \leqq M^{|\alpha-\beta|+1} \Gamma(\varrho|\alpha-\beta|) \|\varphi D^\beta u\|,$$

$$(3.\ 9) \qquad \|T(\varphi D^\alpha u_1)\| \leqq C \|D^{\alpha-2}(u\psi)\| \, \|\varphi\|_2, \quad \text{and}$$

$$(3.\ 10) \qquad \|E[A_{\alpha\beta}, \varphi] D^\beta u_1\| \leqq M^{|\alpha-\beta|+1} \Gamma(\varrho|\alpha-\beta|) \|D^\beta u_1\|_{-2}.$$

Applying Leibniz's formula we may write

$$(3.\ 11) \qquad \|T(\varphi D^\alpha u_1)\| \leqq C \sum_{|\beta|<|\alpha|-1} \|D^\beta u; \omega_\varepsilon\| \, \|D^{\alpha-\beta}\psi\| \binom{\beta}{\alpha},$$

$$(3.\ 12) \qquad \|E[A_{\alpha\beta}, \varphi] D^\beta u_1\| \leqq M^{|\alpha-\beta|+1} \Gamma(\varrho|\alpha-\beta|) \sum_{|\gamma| \leqq |\beta|} \|D^{\beta-\gamma} u; \omega_\varepsilon\| \, \|D^\gamma \psi\| \binom{\beta}{\alpha}.$$

Denote by $\alpha(\xi)$ the function $\chi(\xi) - 1$. It is easy to see that $\alpha(\xi) \in C_0^\infty(R^n)$. Obviously

$$T_1(\varphi D^\alpha u_1)(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x,\xi)} \alpha(\xi) (\varphi D^\alpha u)^\wedge(\xi)\, d\xi.$$

Applying Parseval's formula we obtain

$$(3.\ 13) \qquad \|T_1(\varphi D^\alpha u_1)\| \leqq M^{|\alpha|+1} \|\varphi u\| + \sum_{|\beta|<|\alpha|-1} \binom{\beta}{\alpha} \|D^\beta u; \omega_\varepsilon\| \, \|D^{\alpha-\beta}\varphi\|.$$

Combining (3. 5), (3. 8), (3. 11), (3. 12), and (3. 13) we get

$$\|D^\alpha u;\omega_{3\varepsilon}\| \leqq \sum_{|\beta|<|\alpha|} M^{|\alpha-\beta|+1}\Gamma(\varrho|\alpha-\beta|)\|D^\beta u;\omega_{2\varepsilon}\| + \tag{3. 14}$$

$$+\sum_{|\beta|<|\alpha|-1}\binom{\beta}{\alpha}\|D^\beta u;\omega_\varepsilon\|(\|D^{\alpha-\beta}\psi\|+\|D^{\alpha-\beta}\varphi\|)+$$

$$+\sum_{|\beta|<|\alpha|-1} M^{|\alpha-\beta|+1}\Gamma(\varrho|\alpha-\beta|)\sum_{|\gamma|\leqq|\beta|}\binom{\gamma}{\beta}\|D^{\beta-\gamma}u;\omega_\varepsilon\|\,\|D^\gamma\varphi\|.$$

We choose two sequences $\varphi_k\in C_0^\infty(\omega_{(k-1)\varepsilon})$, $\psi_k\in C_0^\infty(\omega_{(k-2)\varepsilon})$ such that $\psi_k(x)=1$ in $\omega_{(k-1)\varepsilon}$, $\varphi_k(x)=1$ in $\omega_{k\varepsilon}$, and

$$\|D^\alpha\varphi_k\|_\infty \leqq C^{k+1}k^{|\alpha|}\varepsilon^{-|\alpha|},\quad \|D^\alpha\psi_k\|_\infty\leqq C^{k+1}k^{|\alpha|}\varepsilon^{-|\alpha|}$$

for $|\alpha|\leqq k$. If in (3. 13) we take $\varphi=\varphi_k$ and $\psi=\psi_k$ from (3. 14) it follows

$$\|D^\alpha u;\omega_{|\alpha|\varepsilon}\| \leqq \sum_{|\beta|<|\alpha|} M^{|\alpha-\beta|+1}\Gamma(\varrho|\alpha-\beta|)\|D^\beta u;\omega_{(|\alpha|-1)\varepsilon}\| + \tag{3. 15}$$

$$+C\sum_{|\beta|<|\alpha|-1}\binom{\beta}{\alpha}\|D^\beta u;\omega_{(|\alpha|-2)\varepsilon}\|\,|\alpha|^{|\alpha-\beta|}\varepsilon^{-|\alpha-\beta|}+$$

$$+\sum_{|\beta|<|\alpha|} M^{|\alpha-\beta|+1}\Gamma(\varrho|\alpha-\beta|)\|D^\beta u;\omega_{(|\alpha|-2)\varepsilon}\|\sum_{|\gamma|\leqq|\beta|}|\gamma|^{-\varrho|\gamma|}\varepsilon^{-|\gamma|}|\alpha|^{-|\gamma|}.$$

Let δ be a non-negative constant, sufficiently small. If we take ε such that $|\alpha|\varepsilon\leqq\delta$, then from (3. 15) we obtain

$$\|D^\alpha u;\omega_{|\alpha|\varepsilon}\| \leqq \sum_{|\beta|<|\alpha|} M^{|\alpha-\beta|+1}\Gamma(\varrho|\alpha-\beta|)\|D^\beta u;\omega_{(|\alpha|-1)\varepsilon}\| +$$

$$+\sum_{|\beta|<|\alpha|-1} M^{|\alpha-\beta|+1}\Gamma(\varrho|\alpha-\beta|)\|D^\beta u;\omega_{(|\alpha|-2)\varepsilon}\|.$$

By recurrence with respect to $|\alpha|$ we get

$$\|D^\alpha u;\omega_{|\alpha|\varepsilon}\| \leqq M^{|\alpha|+1}\Gamma(\varrho|\alpha|).$$

Hence

$$\|D^\alpha u;\omega_\delta\| \leqq M^{|\alpha|+1}\Gamma(\varrho|\alpha|).$$

Since δ is arbitrary this implies that $u\in G^\varrho(\omega)$, and the proof of Theorem 2 is complete.

Bibliography

[1] J. J. Kohn and L. Nirenberg, An algebra of pseudo-differential operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, **18** (1965), 355.

[2] L. Hörmander, *Linear partial differential operators* (Berlin, 1963).

[3] L. Hörmander, Pseudo-differential operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, **18** (1965), 501.

[4] L. R. Volevič, Hypoelliptic convolution equations, *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* **168** (1966), 1232.

[5] L. Boutet de Monvel et P. Krée, Opérateurs pseudo-différentiels et classes de Gevrey, *C. R. Acad. Sci. Paris,* **263** (1966), 245.

FACULTY OF MATH. AND MECH.
UNIVERSITY OF IASHY (ROUMANIA)

(Received Aug. 30, 1968)

On invertible elements in compact semigroups

By I. FABRICI in Bratislava (ČSSR)

The paper [6] investigates the structure of abstract semigroups containing invertible elements. The purpose of this paper is to study the structure of compact semigroups containing invertible elements. Throughout this paper S will denote a Hausdorff compact semigroup.

In the first place we set down some notions and statements.

An element a of S is called *totally maximal*, if $SaS=S$. An element a of S is called *left (right, two-sided) invertible* if $Sa=S$ $(aS=S, aSa=S)$.

Further, $\mathscr{K}$ is the set of elements of a semigroup S which are neither left nor right invertible, $\mathscr{L}$ is the set of elements of S which are left invertible but not right invertible, $\mathscr{R}$ is the set of elements of S which are right invertible but not left invertible, and finally $\mathscr{G}$ is the set of elements of S which are both left and right invertible. From [5] it is known that each of the sets $\mathscr{K}, \mathscr{L}, \mathscr{R}, \mathscr{G}$ is a subsemigroup of the semigroup S.

Denote by L^* the maximal proper left ideal of a semigroup S, which contains every proper left ideal of S. The maximal proper right ideal R^* and the maximal proper two-sided ideal M^* are defined similarly.

All ideals in this paper are considered in the algebraic sense.

We admit in our considerations that the ideals L^*, R^*, M^* possibly are void sets.

Lemma 1. [6] *If in a semigroup S there exists at least one left invertible element, then S contains the unique maximal proper left ideal L^* and the complement of this ideal is the set of left invertible elements of S; hence $S=L^* \cup \mathscr{L} \cup \mathscr{G}$.*

Remark 1. A similar statement holds if S contains at least one right invertible element.

Lemma 2. [2] *Let S be a compact semigroup. If the ideal $L^*(R^*)$ exists in S, then M^* and $M^*=L^*$ $(M^*=R^*)$ also exist in S.*

From [6] it is known that every left invertible or right invertible element of a semigroup S is totally maximal. The converse statement does not hold.

Let $\mathscr{M}$ denote the set of all totally maximal elements of S which are neither left nor right invertible. Then, evidently $\mathscr{M} \subseteqq \mathscr{K}$.

Corollary. *Let S be a compact semigroup, which contains invertible elements. Then every totally maximal element is either left invertible or right invertible.*

Theorem 1a. *Let S be a compact semigroup. Then $P = \mathscr{L} \cup \mathscr{G}$ is a closed subset of the compact semigroup S.*

Proof. Since $P = \{a \in S \colon Sa = S\}$, there exists for an arbitrary $b \in S$ an $x \in S$ such that $xa = b$. In order to prove that P is closed it is sufficient to show that for an arbitrary $a \in \bar{P}$ ($\bar{P}$ means the closure of P) and for an arbitrary $b \in S$ there exists an $x \in S$ such that the relation $xa = b$ holds, since in this way it will be proved that $\bar{P} = P$. Let us assume that this is not true. This means that for some $b \in S$ the equation $xa = b$ has no solution in S and, therefore $xa \neq b$ for every $x \in S$. Since S is a Hausdorff space, it follows from the continuity of multiplication that there exist neighbourhoods $o(x) \in O(x)$, $o_x(a) \in O(a)$ and $o_x(b) \in O(b)$ such that

$$o_x(b) \cap [o(x), o_x(a)] = \emptyset,$$

where $O(x)$, $O(a)$ and $O(b)$ are complete systems of neighbourhoods of the elements x, a, b. Let us consider a system of neighbourhoods $\{o(x)\}$, $x \in S$. It is evident that $S = \bigcup_{x \in S} o(x)$. Since S is a compact semigroup, there exists such a finite system $o(x_1), o(x_2), \ldots, o(x_n)$, which also covers S. For $i = 1, 2, \ldots, n$ we have

$$o_{xi}(b) \cap [o(x_i) \cdot o_{xi}(a)] = \emptyset.$$

Evidently, there exist such neighbourhoods $o(b) \in O(b)$, $o(a) \in O(a)$, that $o(b) \subset \bigcap_{i=1}^{n} o_{xi}(b)$ and $o(a) \subset \bigcap_{i=1}^{n} o_{xi}(a)$. But then we have

$$o(b) \cap [o(x_i) \cdot o(a)] = \emptyset,$$

for $i = 1, 2, \ldots, n$. Since $S = \bigcup_{i=1}^{n} o(x_i)$, it follows from the preceeding relations:

$$(*) \qquad o(b) \cap [S \cdot o(a)] = \emptyset.$$

We show that the last relation is not correct. Since $a \in \bar{P}$, it follows that in every neighbourhood of a there exists at least one element of P. Therefore there exists such an element $\xi \in P$ that $\xi \in o(a)$ and, since $\xi \in P$, there exists an $\eta \in S$ such that $b = \eta \cdot \xi$. But $b \in o(b)$, so $b = \eta \cdot \xi \in S \cdot o(a)$, and this contradicts relation $(*)$.

Analogously, one proves the following

Theorem 1b. *Let S be a compact semigroup. Then $Q = \mathscr{R} \cup \mathscr{G}$ is a closed subset of S.*

Corollary. *P and Q are compact subsets of S.*

We say that a semigroup S is left simple (right simple, simple) if S contains no proper left (right, two-sided) ideal of S, distinct of S and the void set.

Theorem 2a. *Let S be a compact semigroup. Then $P=\mathscr{L}\cup\mathscr{G}$ is a left simple compact subsemigroup of S.*

Proof. Let $a, b\in P$. Then $Sa=S$, $Sb=S$, $S(ab)=(Sa)b=Sb=S$. This means that $ab\in P$ and P is a subsemigroup of S. Assume that $L'\subset S-L^*$ is a proper left ideal of $S-L^*$. Then Lemma 2 implies: $S(L'\cup L^*)=SL'\cup SL^*=(S-L^*)L'\cup \cup L^*L'\cup SL^*\subset L'\cup L^*$ and this is a contradiction with the assumption that L^* contains every proper left ideal of S.

The proof of the following statement is analogous.

Theorem 2b. *Let S be a compact semigroup. Then $Q=\mathscr{R}\cup\mathscr{G}$ is a right simple compact subsemigroup of S.*

Let e be an idempotent of a compact semigroup S. We say that an element $a\in S$ belongs to the idempotent e, if e is the unique idempotent of the closure $\bar{A}$ of the semigroup $A=\{a, a^2, \dots\}$.

Let us denote by K_α the set of all elements of a semigroup S, which belongs to the idempotent e_α; we shall call it a K-class. From [1] it is known that any compact semigroup S can be written as the union of disjoint K-classes.

We say that a group G_α is a maximal group belonging to the idempotent e_α, if G_α contains e_α and if there exists no group $G'\neq G_\alpha$ such that $G_\alpha\subset G'\subset K_\alpha$.

Theorem 3a. *Either of the subsemigroups L^*, P of a compact semigroup S is the union of some K-classes of S.*

Proof. To prove our statement it is sufficient to show that no K-class can have a non-void intersection with both subsemigroups.

Let us assume that $K_\alpha\cap L^*\neq\emptyset$ and $K_\alpha\cap P\neq\emptyset$ holds for some K-class K_α. Let $a\in K_\alpha\cap L^*$. $a\in K_\alpha$ means that a belongs to the idempotent e_α. But also $a\in L^*$. Let us consider the principal left ideal generated by a: $(a)_L=a\cup Sa$. $(a)_L\subset L^*$ and $(a)_L$ is a closed subsemigroup of a compact semigroup S, therefore $(a)_L$ is also a compact subsemigroup. So we have $\bar{A}\subseteqq(a)_L$ where $A=\{a, a^2, \dots\}$.The subsemigroup $\bar{A}$ contains the unique idempotent and since $a\in K_\alpha$ this idempotent must be e_α. We have obtained that $e_\alpha\in\bar{A}\subset(a)_L\subset L^*$. Let now $b\in K_\alpha\cap P$. The element b also belongs to the idempotent e_α. But since $b\in P$ and P is a compact subsemigroup of the semigroup S, we have $e_\alpha\in\bar{B}\subset P$ for $B=\{b, b^2, \dots\}$. We have obtained that $e_\alpha\in L^*$ and at the same time $e_\alpha\in P$. But this is impossible, since $L^*\cap P=\emptyset$.

Analogously, we can prove

Theorem 3b. *Either of the subsemigroups R^*, Q of a compact semigroup S is the union of some K-classes of S.*

Remark 2. In [3] it is proved that a left (right) simple semigroup having at least one idempotent is a disjoint union of algebraically isomorphic groups G_α. But P is a left simple subsemigroup, Q is a right simple subsemigroup. Moreover, either of P, Q is a compact subsemigroup, so they contain at least one idempotent. From this we have

Theorem 4. *Either of the subsemigroups P, Q of a compact semigroup S is a disjoint union of topologically isomorphic maximal groups G_α.*

Proof. The statement that $P(Q)$ is a disjoint union of maximal algebraically isomorphic groups G_α follows from Remark 2 and Theorems 3a and 3b. It is only necessary to show that these groups are isomorphic also topologically. It is known from [3] that if $e_\alpha \in P$ then $G_\alpha = e_\alpha P$ and for $x \in G_\alpha$

(1) $$x \to e_\beta x$$

is an isomorphic mapping of the group G_α onto G_β and for $y \in G_\beta$

(2) $$y \to e_\alpha y$$

is the inverse mapping.

But according to the assumption, the multiplication in S is continuous. This means that the transformation (1) is a continuous transformation of a topological group G_α onto the topological group G_β, and the inverse transformation (2) is a continuous transformation of G_β onto G_α. Hence, G_α and G_β are topologically isomorphic.

Corollary. *If in a compact semigroup S, $\mathcal{L} \neq \emptyset$ ($\mathcal{R} \neq \emptyset$) then the semigroup $\mathcal{L}$ ($\mathcal{R}$) contains at least one idempotent.*

Theorem 5a. *If a compact semigroup S contains at least one left invertible element, then S contains at least one right unit.*

Proof. From Theorem 2a. we know that P contains at least one idempotent. Let $e_1 \in P$. Then, evidently, $Se_1 = S$. Let $x \in S$ be an arbitrary element. $Se_1 = S$ implies $ye_1 = x$ for some $y \in S$. Hence, $xe_1 = (ye_1)e_1 = ye_1^2 = ye_1 = x$. This means that e_1 is a right unit of S.

Analogously we can prove

Theorem 5b. *If a compact semigroup S contains at least one right invertible element, then S contains at least one left unit.*

Theorem 6. *Let S be a compact semigroup. Then only one of $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, and $\mathcal{G}$ can be non-empty.*

Proof. Let $\mathscr{L} \neq \emptyset$, $\mathscr{G} \neq \emptyset$. From [5] we know that $\mathscr{G}$ is a subgroup of S and its unit is the unit of S, and Corollary of Theorem 4 implies that $\mathscr{L}$ contains at least one idempotent which is a right unit of S, this is a contradiction.

Corollary 1. *If S is a compact semigroup, then only the following cases are possible:* 1) $S = \mathscr{K}$, 2) $S = \mathscr{L}$, 3) $S = \mathscr{R}$, 4) $S = \mathscr{G}$, 5 $S = \mathscr{K} \cup \mathscr{L}$, 6) $S = \mathscr{K} \cup \mathscr{R}$, *and* 7) $S = \mathscr{K} \cup \mathscr{G}$.

Theorems 1a, 1b, and 6 imply

Corollary 2. *The subsemigroups $\mathscr{L}$, $\mathscr{R}$, and $\mathscr{G}$ of a compact semigroup S are compact subsemigroups.*

Theorems 2a, 2b, 4 and 6 imply

Corollary 3. *The subsemigroup $\mathscr{L}$ ($\mathscr{R}$) is left simple (right simple) and both are disjoint unions of topologically isomorphic maximal groups G_α.*

References

[1] Ш. Шварц, К теории хаусдорфовых полугрупп, *Чехослов. мат. журнал*, **5** (1955), 1—23.

[2] Ш. Шварц, О топологических полугруппах с односторонними единицами, *Чехослов. мат. журнал*, **5** (1955), 153—162.

[3] Ш. Шварц, Структура простых полугрупп без нуля, *Чехослов. мат. журнал*, **1** (1951), 51—65.

[4] Ш. Шварц, Об увеличительных элементах в теории полугрупп, *Доклады Акад. Наук СССР*, **4** (1955), 697—698.

[5] Е. С. Ляпин, *Полугруппы* (Москва, 1960).

[6] И. Фабрици, Об обратимых элементах полугруппы и их отношении к увеличительным элементам полугруппы, *Mat.-fyz. časopis*, **15** (1965), 177—185.

[7] I. Fabrici, O uplne maximálnych prvkoch v pologrupách, *Mat.-fyz. časopis*, **13** (1963), 16—19.

[8] A. H. Clifford—G. B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*. I (Providence, 1961).

(Received Aug. 28, 1968)

Über gruppentheoretische Eigenschaften, die sich auf t-Produkte übertragen

Von WOLFGANG P. KAPPE in Columbus (Ohio, USA)

1. Einleitung

Es sei H eine Gruppe und $e(H)$ die Menge der Ordnungen von Elementen aus H. Wir nennen eine Gruppe G das t-Produkt der Normalteiler M und N, falls (i) G/M und G/N periodisch, (ii) $e(G/M) \cap e(G/N) = 1$. Wir sagen, daß eine gruppentheoretische Eigenschaft F sich auf t-Produkte überträgt, falls jedes t-Produkt von zwei F-Normalteilern eine F-Gruppe ist. In der vorliegenden Arbeit zeigen wir für einige Klassen von gruppentheoretischen Eigenschaften, daß sie sich auf t-Produkte übertragen.

Satz 1. *Die folgenden Eigenschaften F übertragen sich auf t-Produkte:*

a) *Jede Eigenschaft F, bei der Produkte von F-Normalteilern F-Gruppen sind* (Beispiele: Nilpotenz, lokale Nilpotenz, Auflösbarkeit).

b) *Die Eigenschaft F = lokal E, falls E sich auf t-Produkte überträgt und E-Gruppen (also auch F-Gruppen) lokal nilpotent sind.*

c) *Die Eigenschaft F = lokal E, falls sich E auf t-Produkte überträgt und E-Gruppen lokal endlich sind.*

Bemerkung. Es sei s eine natürliche Zahl und $P(s, G)$ die von den s-ten Potenzen erzeugte Untergruppe von G. Von F. Szász [8] ist die Frage aufgeworfen worden nach gruppentheoretischen Eigenschaften F, für die gilt:

(∗) Sind $P(m, G)$ und $P(n, G)$ F-Gruppen und $(m, n) = 1$, so ist auch G eine F-Gruppe.

Die Gültigkeit von (∗) ist von F. Szász [7], [8] für F = zyklisch, und von Vl. Dlab [3] für F = abelsch nachgewiesen worden. Da $e(G/P(s, G))$ aus Teilern von s besteht, ist G das t-Produkt der Normalteiler $P(m, G)$ und $P(n, G)$, falls $(m, n) = 1$. Jede Eigenschaft F, die sich auf t-Produkte überträgt, erfüllt damit (∗). Unter Zusatzannahmen kann umgekehrt aus der Gültigkeit von (∗) geschlossen werden, daß F sich auf t-Produkte überträgt. Bestehen nämlich $e(G/M)$ und $e(G/N)$

aus Teilern von Zahlen m bzw. n (was z.B. stets zutrifft, falls F-Gruppen endlich sind), so ist offenbar $P(m, G) \leqq M$ und $P(n, G) \leqq N$. Sind überdies Untergruppen von F-Gruppen wieder F-Gruppen, so sind $P(m, G)$ und $P(n, G)$ F-Gruppen, also G eine F-Gruppe nach ($\ast$), da aus $e(G/M) \cap e(G/N) = 1$ offenbar $(m, n) = 1$ folgt.

VL. DLAB [2], [3] hat die folgende Verallgemeinerung ($\ast\ast$) der Bedingung ($\ast$) betrachtet:

($\ast\ast$) Sind $m_1, \ldots, m_k$ natürliche Zahlen und $P(m_1, G), \ldots, P(m_k, G)$ F-Gruppen, so ist auch $P((m_1, \ldots, m_k), G)$ eine F-Gruppe.

Von VL. DLAB [3] stammt das Ergebnis, daß die Eigenschaft „abelsch mit gegebener Erzeugendenzahl" die Bedingung ($\ast\ast$) erfüllt. Wir beweisen dazu:

Satz 2. *Überträgt sich die gruppentheoretische Eigenschaft F auf t-Produkte und sind F-Gruppen lokal nilpotent, so erfüllt F die Bedingung* ($\ast\ast$).

Satz 3. *Die folgenden Eigenschaften F übertragen sich auf t-Produkte:*

a) *Sei E eine gruppentheoretische Eigenschaft nilpotenter Gruppen, die sich auf t-Produkte und homomorphe Bilder überträgt, und a, b, c, d ganze Zahlen mit $1 \leqq a \leqq b$ und $0 \leqq c \leqq d$. F sei definiert durch: $H \in F$ genau dann, wenn H nilpotent und $(H_a)^{(c)}/(H_b)^{(d)} \in E$.*

b) *Sei j eine feste Zahl und F definiert durch: $H \in F$ genau dann, wenn H nilpotent der Klasse $c(H) \leqq j$.*

c) *Sei j eine feste Zahl und F definiert durch: $H \in F$ genau dann, wenn H nilpotent und $l(H) \leqq j$.*

d) *Für eine Mächtigkeit k sei F definiert durch: $H \in F$ genau dann, wenn H nilpotent ist und ein Erzeugendensystem T hat mit $|T| \leqq k$.*

e) *F = alle Elemente haben quadratfreie endliche Ordnung.*

Eine große Klasse gruppentheoretischer Eigenschaften endlicher Gruppen, die sich auf t-Produkte übertragen, sind gewisse lokal definierte Formationen ([4], [5, 696]). In Abschnitt 4 werden wir diese Eigenschaften, zu denen auch Überauflösbarkeit gehört, näher untersuchen.

Definitionen und Bezeichnungen

$F(G)$ = Fittinggruppe von G; $\Phi(G)$ = Frattinigruppe von G;

$F_p(G)$ = größter p-nilpotenter Normalteiler von G;

G' = Kommutatorgruppe von G; $c_G X$ = Zentralisator von X in G;

$[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$, $[[a_1, \ldots, a_n], a_{n+1}] = [a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}]$;

$[A, B]$ = Gruppe erzeugt von allen $[a, b]$ mit $a \in A$, $b \in B$;

$G_1 = G$, $G_{i+1} = [G_i, G]$, $G^{(o)} = G$, $G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}]$;

$|T|$ = Mächtigkeit der Menge T, $|g|$ = Ordnung von g;

$n(g, X) = |gX/X|$ für $g \in G$ und einen Normalteiler X von G;

π = Menge von Primzahlen, π' = Komplement von π;

π-Zahl: alle Primteiler gehören zu π;

π-Gruppe: alle Elementordnungen sind π-Zahlen.

Hat G die gruppentheoretische Eigenschaft F, so schreiben wir $G \in F$ und nennen G eine F-Gruppe.

Die 1-Gruppe soll jede betrachtete Eigenschaft haben.

U: Klasse aller Gruppen; N: Klasse aller nilpotenten Gruppen;

G ist nilpotent der Klasse $c(G)$: $G_{c(G)} \neq 1$ und $G_{c(G)+1} = 1$;

G ist auflösbar der Länge $l(G) \leqq j$: $G^{(j)} = 1$;

$G \in$ lokal E: jede endlich erzeugte Untergruppe hat E;

G kann von k Elementen erzeugt werden: es gibt ein Erzeugendensystem T von G mit $|T| \leqq k$.

2. Vorbereitende Betrachtungen

Lemma 1. a) *Ist S eine Menge von Normalteilern von G mit*

(i) *G/X periodisch für alle $X \in S$,* (ii) $\bigcap_{X \in S} e(G/X) = 1$,

so gilt für jede Untergruppe H von G

$$H = \prod_{X \in S} (H \cap X)$$

und

(i') *$H/H \cap X$ periodisch für alle $X \in S$,* (ii') $\bigcap_{X \in S} e(H/H \cap X) = 1$.

b) *Ist σ ein Homomorphismus von G und G das t-Produkt von M und N, so ist G^σ das t-Produkt von M^σ und N^σ.*

c) *Ist G das t-Produkt von M und N, so folgt für alle i*

$$G_i = M_i N_i.$$

Beweis. a) Für ein festes Element $h \in H$ ist nach Voraussetzung das System der Zahlen $\{n(h, X)\}_{X \in S}$ teilerfremd. Also gibt es eine endliche Menge von Normalteilern $X_1, \ldots, X_r$ aus S mit $(n(h, X_1), \ldots, n(h, X_r)) = 1$ und ganze Zahlen $a_1, \ldots, a_r$ mit $1 = a_1 n(h, X_1) + \ldots + a_r n(h, X_r)$. Aus $h^{n(h, X)} \in H \cap X$ folgt dann $H \subseteqq \prod_{X \in S} (H \cap X)$ und die andere Inklusion ist trivial. Schließlich folgen (i') und (ii') aus (i) und (ii) wegen $H/H \cap X \cong HX/X \subseteqq G/X$.

b) Offenbar ist $e(G^\sigma/X^\sigma) \subseteqq e(G/X)$.

c) Aus der Definition von G_i folgt $G_i \geqq M_i N_i$. Wir zeigen umgekehrt $c(G/M_i N_i) \leqq i-1$, woraus $G_i = M_i N_i$ folgt, da G_i der Durchschnitt aller Normalteiler Y von G mit $c(G/Y) \leqq i-1$. Nach Lemma 1a haben wir $G = MN$, und $H = G/M_i N_i$ ist nilpotent als Produkt der nilpotenten Normalteiler $NM_i/M_i N_i$ und $MN_i/M_i N_i$. Also genügt es, $H_i = H_{i+1}$ zu zeigen. Nach Lemma 1b ist H/H_{i+1} das t-Produkt zweier Normalteiler M^* und N^* mit $c(M^*) \leqq i-1$ und $c(N^*) \leqq i-1$. Für $x_1, \ldots, x_i \in H/H_{i+1}$ sei a das Produkt der Zahlen $n(x_1, M^*), \ldots, n(x_i, M^*)$, und

b das Produkt $n(x_1, N^*)...n(x_i, N^*)$. Dann ist $(a, b)=1$ und $x_j^a \in M^*$ und $x_j^b \in N^*$ für $j=1, ..., i$. Aus $c(M^*) \leqq i-1$ und $c(N^*) \leqq i-1$ ergibt sich

$$[x_1^a, \cdots, x_i^a] = 1 \quad \text{und} \quad [x_1^b, \cdots, x_i^b] = 1.$$

Vermöge $c(H/H_{i+1}) \leqq i$ folgt daraus

$$[x_1, \cdots, x_i]^{a^i} = [x_1, \cdots, x_i]^{b^i} = 1,$$

also $[x_1, ..., x_i]=1$ wegen $(a^i, b^i)=(a, b)=1$. Damit ist $c(H/H_{i+1}) \leqq i-1$, d.h. $H_i = H_{i+1}$ bewiesen.

Lemma 2. a) *Wird eine nilpotente Gruppe G durch $T \cup G_2$ erzeugt, so erzeugt T bereits G. Insbesondere kann G durch k Elemente erzeugt werden genau dann, wenn dies für G/G_2 zutrifft.*

b) *Ist G_i/G_{i+1} eine π-Gruppe, so ist G_i/G_k eine π-Gruppe für jedes $k \geqq i$.*

c) *Sei G eine lokal nilpotente Gruppe und T ein Erzeugendensystem von G. Dann ist G eine π-Gruppe genau dann, wenn T aus π-Elementen besteht. G ist endliche π-Gruppe genau dann, wenn T endlich ist und aus π-Elementen besteht.*

d) *Ist G das t-Produkt der nilpotenten Normalteiler M und N, so ist G_i das t-Produkt von M_i und N_i.*

Beweis. a) Ist σ ein Homomorphismus von G und T ein Erzeugendensystem von G, so ist T^σ ein Erzeugendensystem für G^σ. Erzeugt umgekehrt das System $T \subseteqq G$ zusammen mit G_2 die Gruppe G, so folgt aus

$$[ab, c] \equiv [a, c][a, c, b][b, c] \equiv [a, c][b, c] \bmod G_3,$$

daß G_2 in der von T und G_3 erzeugten Untergruppe enthalten ist. Also wird G von T und G_3, und induktiv von T und G_i erzeugt. Wegen $G_{c(G)+1} = 1$ ist damit gezeigt, daß T die Gruppe erzeugt.

b) Offenbar genügt es zu zeigen, daß G_{i+1}/G_{i+2} eine π-Gruppe ist. Sind $a, b \in G_i$, $c \in G$ und k eine natürliche Zahl, so ist

$$[ab, c] \equiv [a, c][b, c] \bmod G_{i+2}, \quad [a^k, c] \equiv [a, c]^k \bmod G_{i+2}.$$

Also sind die Elemente $[a, c] \bmod G_{i+2}$ π-Elemente, und da sie die abelsche Gruppe G_{i+1}/G_{i+2} erzeugen, ist G_{i+1}/G_{i+2} eine π-Gruppe.

c) Die Bedingungen sind offenbar notwendig. Da weiter in jedem Element $g \in G$ nur endlich viele Erzeugende auftreten und G lokal nilpotent ist, können wir wir uns auf den Fall nilpotenter Gruppen beschränken. Die abelsche Gruppe G/G_2 wird von π-Elementen erzeugt, ist also eine π-Gruppe, und nach Lemma 2b folgt, daß $G=G_1/G_{c(G)+1}$ eine π-Gruppe ist. Erzeugt $T(i) \cup G_{i+1}$ die Gruppe G_i, so folgt aus $[ab, c] \equiv [a, c][b, c] \bmod G_{i+2}$ für $a, b \in G_i$ und $c \in G$, daß die Kommutatoren $[a, c]$ mit $a \in T(i)$, $c \in T$ zusammen mit G_{i+2} die Gruppe G_{i+1} erzeugen. Ist also

T endlich, so sind auch alle $T(i)$ endlich, und die abelschen π-Gruppen G_i/G_{i+1} sind endlich. Also ist auch $G=G_1/G_{c(G)+1}$ eine endliche π-Gruppe.

d) Sei $H=G/M_i$, $X=M/M_i$ und $Y=NM_i/M_i$. Nach Lemma 1b ist H das t-Produkt von X und Y, und nach Lemma 1c gilt $H_i=X_iY_i=Y_i$, $H_{i+1}=X_{i+1}Y_{i+1}$. Sind $h_1, \dots, h_i$ Elemente von H und a das Produkt der Zahlen $n(h_1, X), \dots, n(h_i, X)$, so ist $[h_1^a, \dots, h_i^a]=1$ wegen $c(X)\leqq i-1$, also

$$[h_1, \dots, h_i]^{a^i} \equiv 1 \bmod Y_{i+1}$$

wegen $c(H/Y_{i+1})\leqq i$. Nach Voraussetzung ist a, also auch a^i, eine π-Zahl, und wir haben damit gezeigt, daß die abelsche Gruppe $H_i/Y_{i+1}=Y_i/Y_{i+1}$ eine π-Gruppe ist. Nach Lemma 2b folgt, daß die nilpotente Gruppe Y_i eine π-Gruppe ist, und damit haben wir schließlich, daß $G_i/M_i=H_i=Y_i$ eine π-Gruppe ist. Ebenso folgt, daß G_i/N_i eine π'-Gruppe ist, und folglich ist $e(G_i/M_i)\cap e(G_i/N_i)=1$.

3. Beweis der Sätze

Beweis von Satz 1. a) Nach Lemma 1a ist $G=MN$.

b) Sei H eine endlich erzeugbare Untergruppe von G. Die Normalteiler M und N sind lokal nilpotent, also auch $G=MN$, H, $H/H\cap M$ und $H/H\cap N$. Da H endlich erzeugbar ist, sind $H/H\cap M$ und $H/H\cap N$ endlich nach Lemma 2c, also $H\cap M$ und $H\cap N$ endlich erzeugbar [8, V. 1. c. Corollary]. Nun gilt $H\cap M\in E$ und $H\cap N\in E$, und nach Lemma 1a ist H das t-Produkt von $H\cap M$ und $H\cap N$. Nach Voraussetzung ist daher $H\in E$ und somit $G\in$ lokal E.

c) Die Normalteiler M und N sind lokal endlich, also auch $H/H\cap M\cong \cong HM/M\subseteq G/M = NM/M\cong N/N\cap M$ und $H/H\cap N$ für jede Untergruppe H von $G=MN$. Ist nun H endlich erzeugbar, so sind $H/H\cap N$ und $H/H\cap M$ endlich, also $H\cap M$ und $H\cap N$ endlich erzeugbar [8, V. 1. c. Corollary]. Nach Lemma 1a ist H das t-Produkt der E-Normalteiler $H\cap M$ und $H\cap N$, und nach Voraussetzung folgt $H\in E$.

Beweis von Satz 2. Es genügt offenbar Satz 2 für $k=2$ zu beweisen. Mit $m=(m,n)c$ und $n=(m,n)d$ hat man $(g^{(m,n)})^c\in P(m,G)$ und $(g^{(m,n)})^d\in P(n,G)$ für alle $g\in G$. Die Elemente $g^{(m,n)}$ sind Erzeugende für $P\big((m,n),G\big)$, und aus $(c,d)=1$ und Lemma 2c folgt, daß $P\big((m,n),G\big)$ das t-Produkt von $P(m,G)$ und $P(n,G)$ ist.

Beweis von Satz 3. a) Satz 3a ist nur ein Beispiel für die Anwendung des allgemeineren Ergebnisses in Lemma 2d. Danach ist G_a das t-Produkt von M_a und N_a, also $(G_a)^{(1)}$ das t-Produkt von $(M_a)^{(1)}$ und $(N_a)^{(1)}$, und induktiv $(G_a)^{(c)}$ das t-Produkt von $(M_a)^{(c)}$ und $(N_a)^{(c)}$. Nach Lemma 1b ist $(G_a)^{(c)}/(G_b)^{(d)}$ das t-Produkt von $(M_a)^{(c)}$ mod $(G_b)^{(d)}$ und $(N_a)^{(c)}$ mod $(G_b)^{(d)}$. Wegen $(G_b)^{(d)}=(M_b)^{(d)}(N_b)^{(d)}$ sind $(M_a)^{(c)}$ mod

$(G_b)^{(d)}$ und $(N_a)^{(c)}$ mod $(G_b)^{(d)}$ homomorphe Bilder der E-Gruppen $(M_a)^{(c)}/(M_b)^{(d)}$ bzw. $(N_a)^{(c)}/(N_b)^{(d)}$, also ist $(G_a)^{(c)}/(G_b)^{(d)}$ nach Voraussetzung eine E-Gruppe.

b) Folgt aus Lemma 1c direkt wegen $G_{j+1}=M_{j+1}N_{j+1}=1$, oder als Spezialfall von Satz 3a mit $b=a+1$, $c=d=0$, und $E=N$ für $a\leqq j$ und $E=1$ für $a>j$.

c) Spezialfall von Satz 3a mit $a=b=1$, $d=c+1$, $E=N$ für $c<j$ und $E=1$ für $c\geqq j$.

d) Nach Lemma 2a ist zu zeigen, daß G/G_2 von k Elementen erzeugt werden kann. Nach Lemma 1c ist $G_2=M_2N_2$, und die abelsche Gruppe G/G_2 ist das t-Produkt zweier abelscher Normalteiler mit höchstens k Erzeugenden nach Lemma 1b. Die Behauptung ist trivial für unendliches k, und für endliches k folgt sie leicht aus dem Hauptsatz über endlich erzeugbare abelsche Gruppen.

e) Zusammen mit Satz 3b erhalten wir z.B., daß sich $F=$„elementar abelsch" auf t-Produkte überträgt. Da M und N periodisch sind, ist auch $G=MN$ periodisch. Angenommen, es gibt ein Element $g\in G$ der Ordnung p^2, p eine Primzahl. Dann ist $g^{n(g,M)}\in M$ und $g^{n(g,N)}\in N$, und p^2 ein Teiler von $n(g,M)|g^{n(g,M)}|$ und $n(g,N)|g^{n(g,N)}|$. Nach Voraussetzung sind $|g^{n(g,M)}|$ und $|g^{n(g,N)}|$ quadratfrei, also ist p ein Teiler von $n(g,M)$ und $n(g,N)$, was $e(G/M)\cap e(G/N)=1$ widerspricht.

4. Lokal definierte Formationen

Definition ([4], [5, VI. § 7]). a) Eine Klasse F endlicher Gruppen heißt eine *Formation*, falls gilt:

(i) Mit $G\in F$ gehören alle epimorphen Bilder zu F.

(ii) Aus $G/M\in F$ und $G/N\in F$ folgt $G/M\cap N\in F$.

b) Ist H/K ein *Hauptfaktor* der Gruppe G und $p\mid |H/K|$, so heißt H/K ein p-Hauptfaktor von G.

Jeder Primzahl p sei eine Formation $F(p)$ zugeordnet. Dann wird durch die folgende Vorschrift eine Formation F lokal durch das System $\{F(p)\}$ definiert: $G\in F$ genau dann, wenn gilt:

(1) Ist $F(p)$ leer, so sei p kein Teiler von $|G|$.

(2) Ist $F(p)$ nichtleer, so gehört die von G in p-Hauptfaktoren H/K von G induzierte Automorphismengruppe $G/c_G(H/K)$ zu $F(p)$.

Lokal definierte Formationen F erfüllen außerdem [5, VI. 7. 5].

(iii) Aus $G/\Phi(G)\in F$ folgt $G\in F$.

Nach einem Ergebnis von Lubeseder [5, VI. 7. 25] lassen sich die (iii) genügenden Formationen endlicher auflösbarer Gruppen lokal definieren.

Lemma 3 ([5, VI. 7. 4]). *Sei F lokal definiert durch das System $\{F(p)\}$. Dann sind gleichwertig:*

a) $G\in F$.

b) *Ist $F(p)$ leer, so ist $p\nmid |G|$. Für nichtleeres $F(p)$ gilt $G/F_p(G)\in F(p)$.*

Satz 4. *Sei F eine lokal durch das System $\{F(p)\}$ definierte Formation. Überträgt sich $F(p)$ auf t-Produkte, so überträgt sich auch F auf t-Produkte.*

Beweis. Sei G das t-Produkt der F-Gruppen A und B. Nach Lemma 1a haben wir $G=AB$. Ist dann $F(p)=\emptyset$, so folgt aus $p\nmid |A|$ und $p\nmid |B|$ sofort $p\nmid |G| \mid |A|\,|B|$. Für $F(p)\neq\emptyset$ bezeichne α den natürlichen Homomorphismus von G auf $G/F_p(G)$. Da $A\cap F_p(G)$ ein p-nilpotenter Normalteiler von A ist, gilt $A\cap F_p(G)\subseteqq F_p(A)$. Dann ist $A^\alpha\cong AF_p(G)/F_p(G)\cong A/(A\cap F_p(G))$ als homomorphes Bild von $A/F_p(A)\in F(p)$ eine $F(p)$-Gruppe, und ebenso folgt $B^\alpha\in F(p)$. Nach Lemma 1b ist G^α das t-Produkt von A^α und B^α, also gehört G^α nach Voraussetzung auch zu $F(p)$ und nach Lemma 3 folgt $G\in F$.

Folgerung. *Die folgenden Eigenschaften endlicher Gruppen übertragen sich auf t-Produkte:*

a) *Nilpotenz;*

b) *Überauflösbarkeit;*

c) *p-Überauflösbarkeit;*

d) *Nilpotenz der Kommutatorgruppe;*

e) *Jede lokal durch ein System $\{F(p)\}$ definierte Formation F, bei der alle $F(p)$ nilpotent sind;*

f) *Jede* (iii) *genügende Formation F, bei der $G/F(G)$ nilpotent ist für jedes $G\in F$.*

Beweis. a) Nilpotenz wird lokal definiert durch $F(p)=1$.

b) Überauflösbarkeit wird lokal definiert durch: $F(p)=$alle endlichen abelschen Gruppen von $p-1$ teilendem Exponenten.

c) p-Überauflösbarkeit ([5, VI. 8. 3]): $F(q)=U$ für $q\neq p$, und $F(p)=$alle endlichen abelschen Gruppen von $p-1$ teilendem Exponenten.

d) Nilpotenz der Kommutatorgruppe: $F(p)=$alle endlichen abelschen Gruppen

e) Sei $F(p)$ eine Formation nilpotenter Gruppen, und H das t-Produkt der $F(p)$-Gruppen K und L. Da in endlichen nilpotenten Gruppen die Sylowgruppen direkte Faktoren sind, gehören nach (i) mit K und L auch die Sylowgruppen von K und L zu $F(p)$. Wegen $e(H/K)\cap e(H/L)=1$ sind die Sylowgruppen von K und L auch Sylowgruppen von H, und nach (ii) gehört damit auch H als direktes Produkt seiner Sylowgruppen zu $F(p)$.

Die in a) bis e) genannten Formationen erfüllen somit die Voraussetzungen von Satz 4.

Daß sich die Eigenschaft Überauflösbarkeit auf t-Produkte überträgt, folgt auch aus einem Ergebnis von Baer [1, section 11, Corollary 2]: Das Produkt G zweier überauflösbarer Normalteiler M und N ist überauflösbar genau dann, wenn G' nilpotent ist.

Ist G das t-Produkt der überauflösbaren Gruppen M und N, so ist $G=MN$, und M', N' sind nilpotent. Nach Lemma 1c ist $G' = M'N'$, also nilpotent, und damit G überauflösbar.

f) Die formation F genügt (iii) und besteht aus auflösbaren Gruppen, da $G/F(G)$ nilpotent ist für $G \in F$. Nach dem Satz von LUBESEDER [5, VI. 7. 25] kann F lokal durch ein System $\{F^*(p)\}$ definiert werden. Bezeichnet N die Formation der nilpotenten Gruppen, so ist wegen $F(G) \subseteqq F_p(G)$ sicher $G/F_p(G) \in F^*(p) \cap N$ und F kann lokal auch durch $F(p) = F^*(p) \cap N$ definiert werden. Da $F(p)$-Gruppen nilpotent sind, folgt f) aus e).

Die dem Beweis von Satz 4 zugrunde liegende Schlußweise läßt sich auf größere Klassen von Gruppen und ähnlich definierte Eigenschaften ausdehnen.

Definition. Sei K eine Klasse von (nicht notwendig endlichen) Gruppen und g ein Funktor, der jeder Gruppe $G \in K$ eine charakteristische Untergruppe $g(G)$ zuordnet derart, daß (*) $g(X) \subseteqq g(G)$ für jeden Normalteiler X von G. Zu g und jeder Eigenschaft E, die sich auf homomorphe Bilder vererbt, sei eine neue Eigenschaft $[E, g]$ definiert durch: $G \in [E, g]$ genau dann, wenn $G \in K$ und $G/g(G) \in E$.

Satz 5. *Überträgt sich E auf t-Produkte, so auch* $[E, g]$.

Beweis. Ist G das t-Produkt von A und B, α der Homomorphismus von G auf $G/g(G)$, so ist $G = AB$ nach Lemma 1a und G^α das t-Produkt von A^α und B^α nach Lemma 1b Weiter ist $g(A) \subseteqq g(G)$, also $g(A) \subseteqq A \cap g(G)$, und damit $A^\alpha \cong Ag(G)/g(G) \cong A/(A \cap g(G))$ eine E-Gruppe als homomorphes Bild von $A/g(A) \in E$. Also ist G^α das t-Produkt der E-Gruppen A^α und B^α, und damit $G \in [E, g]$ bewiesen.

Beispiele für Funktoren, die (*) erfüllen:

Für endliche Gruppen: $F_p(G)$, $\Phi(G)$, $F(G)$, $O_p(G) =$ maximaler p-Normalteiler. Iterierte Funktoren dieser Art.

Für beliebige Gruppen: $\varphi(G) =$ Hirsch—Plotkin-Radikal, G_i, $G^{(i)}$.

Literaturverzeichnis

[1] R. BAER, Classes of finite groups and their properties, *Ill. J. Math.*, **1** (1957), 115—187.

[2] VL. DLAB, On cyclic groups, *Czech. Math. J.*, **10 (85)** (1960), 244—254.

[3] VL. DLAB, A note on powers of a group, *Acta Sci. Math.*, **25** (1964), 177—178.

[4] W. GASCHÜTZ, Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen, *Math. Z.*, **80** (1963), 300—305.

[5] B. HUPPERT, *Endlichen Gruppen.* I (Berlin, 1967).

[6] E. SCHENKMAN, *Group theory* (Princeton, 1965).

[7] F. SZÁSZ, Über Gruppen, deren sämtliche nichttriviale Potenzen zyklische Untergruppen der Gruppe sind, *Acta Sci. Math.*, **17** (1956), 83—84.

[8] F. SZÁSZ, Bemerkungen zu meiner Arbeit „Über Gruppen, deren sämtliche nichttriviale Potenzen zyklische Untergruppen der Gruppe sind", *Acta Sci. Math.*, **23** (1962), 64—66.

(Eingegangen am 6. März 1968)

Über Supplemente in endlichen Gruppen

Von LUDWIG PROHASKA in Rostock (DDR)

1. G sei eine endliche Gruppe, e ihr Einselement. $N \lhd G$ bedeutet, daß N Normalteiler von G ist. Die Untergruppe U von G heißt ein *Supplement* von N, wenn $G=UN$. Es gibt immer das triviale Supplement $U=G$, im allgemeinen interessieren Supplemente mit möglichst kleinem Durchschnitt $U \cap N$. Ist insbesondere $U \cap N=\langle e\rangle$ so heißt U ein *Komplement* von N. In diesem Fall ist G eine zerfallende Erweiterung von N mit U.

Sei

$$G=\sum_{\nu=1}^{n} U r_\nu$$

eine Zerlegung von G in Nebenklassen nach U mit einem festen Repräsentantensystem $R=\{r_\nu,\ \nu=1, \ldots, n\}$. Transformiert man $r_1, \ldots, r_n$ mit Elementen aus U, so erhält man

$$u^{-1} r_\nu u=c_{\nu, u} r_{\nu u} \qquad (\nu=1,2, \cdots, n;\ u \in U),$$

wo $c_{\nu, u} \in U$ ist und die $r_{1 u}, \ldots, r_{n u}$ eine von u abhängige Permutation der $r_1, \ldots, r_n$ bilden. Die von den $c_{\nu, u}$ $(\nu=1,2, \ldots, n;\ u \in U)$ erzeugte Untergruppe $C \subseteqq U$ heißt die zum Repräsentantensystem R gehörige *Koeffizientengruppe*.

Es ist $C \lhd U$. Denn sind $u, v \in U$, so gilt

$$v^{-1} u^{-1} r_\nu u v=v^{-1} c_{\nu, u} v \cdot v^{-1} r_{\nu u} v=v^{-1} c_{\nu, u} v \cdot c_{\nu u, v} r_{\nu u v} .$$

Andererseits ist

$$(u v)^{-1} r_\nu(u v)=c_{\nu, u v} r_{\nu u v},$$

also

$$v^{-1} c_{\nu, u} v=c_{\nu, u v} \cdot c_{\nu u, v}^{-1} \in C.$$

Ist insbesondere $C=\langle e\rangle$, so heißt R ein *ausgezeichnetes Repräsentantensystem* für U in G [2]. Ein bekannter Satz von BURNSIDE über Komplemente [1], p. 327, läßt sich mittels dieses Begriffs folgendermaßen aussprechen [2]:

(A) *Sei $G=\sum_{r_\nu \in R} P r_\nu$, R habe die Koeffizientengruppe $C=\langle e\rangle$, und sei P abelsche Sylowgruppe von G. Dann enthält G einen Normalteiler N mit $G=PN$ und $P \cap N=\langle e\rangle$.*

Die Voraussetzung über P wurde in Sätzen von KOCHENDÖRFFER [2] und ZAPPA [6] abgeschwächt.

In [3] beweist KOCHENDÖRFFER für eine Untergruppe H von G:

(B) *Sei* $G=\sum_{r_\nu \in R} Hr_\nu$, *R habe die Koeffizientengruppe C, sei* $([G:H],[H:C])=1$, *und sei* H/C *nilpotent. Dann enthält G einen Normalteiler N mit* $G=HN$ *und* $H\cap N\subseteq C$

Wenn $C=\langle e\rangle$ ist, kann man „H/C ist nilpotent" ersetzen durch „H/C ist Sylowturmgruppe", d.h. es gibt eine Untergruppenkette $H=H_0\supset H_1\supset\dots$ $\dots\supset H_{r-1}\supset H_r=C$, deren Glieder H_i sämtlich Normalteiler von H sind und deren Indizes $[H_{i-1}:H_i]$ $(i=1,2,\dots,r)$, paarweise teilerfremde Primzahlpotenzen sind [5].

2. In [3] und [4] findet sich die Vermutung, daß in (B) auch für $C\neq\langle e\rangle$ die Voraussetzung „H/C ist nilpotent" noch abgeschwächt werden kann. Wir zeigen, daß sie nicht durch „H/C ist Sylowturmgruppe" ersetzbar ist.

Beispiel. $G=S_5$ = volle Permutationsgruppe des Grades 5. Die permutierten Elemente seien die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5. $H=S_4$ = Untergruppe derjenigen Permutationen, welche die 5 festlassen. Als Repräsentanten für die Nebenklassen von H in G wählen wir:

e (die identische Permutation), (12)(34)(15), (25), (35), (45). In S_4 ist bekanntlich $V=\langle(12)(34),(13)(24)\rangle$ Normalteiler. Er liegt in der alternierenden Gruppe der S_4 und es ist S_4/V Sylowturmgruppe isomorph der S_3.

Bei Transformation mit Elementen aus H werden die Permutationen (15), (25), (35), (45) untereinander vertauscht. Da $(12)(34)\in V\lhd H$, geht dies Element bei Transformation mit Elementen aus H in Elemente aus V über. Das angegebene Repräsentantensystem für H in G besitzt also eine Koeffizientengruppe $\subseteq V$. V ist genau die Koeffizientengruppe, denn

$$(123)(25)(132)=(12)(34)\cdot(12)(34)(15).\ (123)(12)(34)(15)(132)=(13)(24)\cdot(35).$$

Wäre der vermutete Satz richtig, so müßte G einen Normalteiler N enthalten mit $G=HN$ und $H\cap N\subseteq V$. Aus $G/N\cong H/H\cap N$ ergibt sich $|N|=\dfrac{|G|\cdot|H\cap N|}{|H|}=5k$ $(k=1,2,4)$. Bekanntlich enthält die S_5 aber keinen Normalteiler von einer dieser Ordnungen.

3. Es sollen nun einige Bedingungen angegeben werden, unter denen der vermutete Satz für Sylowturmgruppen gültig ist.

Bezeichnet π eine Menge von Primzahlen, so sei $u_\pi(G)$ das Erzeugnis aller Elemente aus G, deren Ordnung nicht durch eine Primzahl aus π teilbar ist.

Satz. *Sei*

(a) $G\supset H\rhd C$, *C umfasse die Koeffizientengruppe eines Repräsentantensystems R von H in G,*

(b) $([G:H],[H:C])=1$, H/C *Sylowturmgruppe. Ferner gelte eine der Bedingungen*

(c_1) $([H:C],[C:\langle e\rangle])=1$,

(c_2) $H \triangleleft G$,

(c_3) $[C:\langle e\rangle]$ *enthalte nur Primteiler von* $[H:C]$, H *sei subnormal in* G, *d.h. es gibt eine Untergruppenkette* $G=K_s \triangleright K_{s-1} \triangleright \ldots \triangleright K_1 \triangleright K_0 = H$.

Bezeichnet π *die Menge der Primteiler von* $[H:C]$, *so ist*

$$G=Hu_\pi(G) \quad \text{und} \quad H \cap u_\pi(G) \subseteqq C.$$

Anmerkung: Unter der Bedingung (c_1) ist $H \cap u_\pi(G)=C$.

Beweis. (c_1): Nach einem Satz von SCHUR [7], p. 162, besitzt C in H ein Komplement $\bar{H}$, d.h. $H=\bar{H}C$ und $\bar{H}\cap C=\langle e\rangle$. Da $H/C \cong \bar{H}$, ist $\bar{H}$ Sylowturmgruppe. Der Komplex CR ist ein Repräsentantensystem für $\bar{H}$ in G. Weil für alle $h \in H$ gilt $h^{-1}CRh=CR$, ist CR ein ausgezeichnetes Repräsentantensystem für $\bar{H}$ in G. Es ist $[G:\bar{H}]=[G:H][C:\langle e\rangle]$, $[\bar{H}:\langle e\rangle]=[H:C]$, also $([G:\bar{H}],[\bar{H}:\langle e\rangle])=1$. Nach [5] ist dann $G=\bar{H}u_\pi(G)$ und $\bar{H}\cap u_\pi(G)=\langle e\rangle$, woraus folgt $G=Hu_\pi(G)$ und $H\cap u_\pi(G)=C$.

(c_2): C ist Normalteiler im Normalisator $N_G(H)$ von H in G, denn ist $x^{-1}= =hr_\nu \in N_G(H)$ $(h\in H, r_\nu \in R)$, so gilt für $c \in C$ $x^{-1}cx=hr_\nu c r_\nu^{-1}h^{-1}=hcc_{\nu,c}r_{\nu c}r_\nu^{-1}h^{-1}\in H$. D.i. gleichbedeutend mit $r_{\nu c}=r_\nu$ und wegen $C \triangleleft H$ folgt $x^{-1}cx \in C$. Die Voraussetzung (c_2) ergibt dann $C \triangleleft G$. Es ist

$$G/C=\sum_{r_\nu \in R}(H/C)(Cr_\nu)$$

und für alle $h\in H$, $r_\nu \in R$ gilt mit geeigneten $r_\mu \in R$

$$(Ch)^{-1}(Cr_\nu)(Ch)=(Cr_\mu).$$

Da ferner $([G/C:H/C],|H/C|)=1$ und H/C Sylowturmgruppe, gibt es nach [5] einen Normalteiler N/C von G/C mit

$$G/C=H/C\cdot N/C \quad \text{und} \quad H/C \cap N/C=\langle e\rangle,$$

also $G=HN$ und $H\cap N=C$. Es ist $N \supseteqq u_\pi(G)$ und $G=Hu_\pi(G)$ mit $H\cap u_\pi(G)\subseteqq C$.

(c_3): Da $H \triangleleft K_1$, ist H das Erzeugnis aller Elemente von K_1, deren Ordnung nur durch Primzahlen aus π teilbar ist. Daher ist H charakteristische Untergruppe von K_1 und also Normalteiler von K_2. Wie eben erhält man, daß H dann sogar charakteristische Untergruppe von K_2 und also Normalteiler von K_3 ist usw. Schließlich: $H \triangleleft K_s=G$, d.h. Bedingung (c_2) ist erfüllt.

Literatur

[1] W. Burnside, *Theory of groups of finite order*, 2. ed. (1911).

[2] R. Kochendörffer, Ein Satz über Sylowgruppen, *Math. Nachr.*, **17** (1959), 189—194.

[3] ———— On supplements in finite groups, *J. Austr. Math. Soc.*, **3** (1963), 63—67.

[4] F. Migliorini, Rappresentanti di laterali e supplementi in un gruppo finito, *Matematiche, Catania* **21** (1966), 11—17.

[5] L. Prohaska, Über die Existenz normaler Komplemente zu gewissen Hallgruppen, *Acta Sci. Math.*, **26** (1965), 159—162.

[6] G. Zappa, Generalizzazione di un teorema di Kochendörffer, *Matematiche, Catania,* **13** (1958), 61—64.

[7] H. Zassenhaus, *The theory of groups*. 2. ed. (1949).

(Eingegangen am 22. Juni 1968)

Simultane Lösung eines halbgruppentheoretischen und eines ringtheoretischen Problems

Von F. SZÁSZ in Budapest

Unter einem Ring verstehen wir in dieser Arbeit stets einen assoziativen Ring. Bezüglich der nötigen Begriffe verweisen wir auf die Bücher CLIFFORD—PRESTON [1], JACOBSON [3], KERTÉSZ [4] und RÉDEI [6]. Weiterhin bezeichnen wir mit $\{a, b, \dots\}$ und $(a, b, \dots)$ die Unterstruktur und das Ideal, welche durch die eingeklammerten Elemente der Halbgruppe bzw. des Ringes erzeugt sind.

Als ein halbgruppentheoretisches Analogon des in meiner Arbeit [8] betrachteten Problems kann folgendes gefragt werden:

Für welche Halbgruppen sind die echten, endlich erzeugbaren Teilhalbgruppen der Halbgruppe untereinander isomorph?

Weiterhin hat RÉDEI [6, § 27, Seite 90] gefragt:

Soll jede Teilmenge einer Halbgruppe H eine Teilhalbgruppe in H sein, wenn die Frattinische Teilhalbgruppe Φ von H leer ist?

Im Buch [4. § 28, Seite 123] von KERTÉSZ ist folgendes Problem aufgeworfen:

Ist der Durchschnitt von zwei modularen Rechtsidealen eines Ringes stets modular?

Dieses Problem war schon vor dem Erscheinen des Buches [4] behandelt.

In dieser Note werden wir diese drei Probleme betrachten, und zwar derart, daß eine simultane Lösung des erwähnten Problems von RÉDEI und des Problems von KERTÉSZ mit der Lösung des ersten Problems in Zusammenhang steht. Für diese simultane Lösung betrachten wir nämlich einen explizit angegebenen Ring und seine adjungierte Halbgruppe. Es soll bemerkt werden, daß das erwähnte Problem von RÉDEI in der Arbeit von LAJOS [5] gelöst ist. Weiterhin hat Verfasser [7] das erwähnte Problem von KERTÉSZ in einer schärferen Form schon gelöst. In dieser Note werden aber diese dreien Probleme miteinander verbunden betrachtet, und aus dieser simultanen Lösung ergibt sich eine Lösung von anderem Typ für das Problem von Kertész[1]).

Es gilt für die Lösung des ersten Problems dieser Note der folgende

Satz 1. *Ist H eine Halbgruppe, für die sämtliche endlich erzeugbare echte Teilhalbgruppen untereinander isomorph sind, so ist H einer der folgenden Halbgruppen isomorph:*

I) *eine endliche zyklische Gruppe von Primzahlordnung;*

II) *eine Halbgruppe $H=\{h\}$ mit $h^2=h$* (dann hat H nur ein Element);

III) *eine (kommutative) Halbgruppe $H=\{h,g\}$ der Ordnung zwei mit $g^2=g$, $h^2=h$ und $gh=hg$, wobei eine der Teilhalbgruppen $\{g\}$, $\{h\}$ ein Ideal von H ist;*

IV) *eine (nichtkommutative) Halbgruppe $H=\{g,h\}$ der Ordnung vier mit der Multiplikationstabelle:*

	g	h	i	j
g	g	i	i	g
h	j	h	h	j
i	g	i	i	g
j	j	h	h	j

Beweis. Um kurz zu sprechen, wird H eine Halbgruppe mit der Eigenschaft E genannt, wenn die endlich erzeugbaren echten Teilhalbgruppen von H untereinander isomorph sind. Weder die Endlichkeit noch die Kommutativität von H wird vorausgesetzt, die Endlichkeit der Halbgruppen mit der Eigenschaft E wird aber bewiesen.

[1]) Obwohl zwischen den Lösungen des ursprünglichen ringtheoretischen Problems von [8] genau kontinuum viele nicht isomorphe unendliche Ringe vorkommen, dagegen ist die Anzahl der Lösungen des ersten Problems dieser Note endlich, und auch selbst die Lösungen sind notwendig endliche aber nicht notwendig kommutative Halbgruppen. Die einzige nichtkommutative, zwischen den Lösungen auftretende Halbgruppe der Ordnung vier ist zur in Lajos [5] betrachteten Halbgruppe isomorph, und sie kann auch in den Verzeichnissen für alle Halbgruppen der Ordnung vier bzw. fünf der Arbeiten von Forsythe [2], Tamura [12] bzw. von Tetsuya, Hashimoto, Akazawa, Shibata, Inui und Tamura [13] gefunden werden. — Die Wichtigkeit des Kertészschen Problems ruht an den folgenden Tatsachen: Das Jacobsonsche Radikal stimmt in jedem Ring bekanntlich mit dem Durchschnitt aller modularen maximalen Rechtsideale überein. Weiterhin ist der Durchschnitt von endlich vielen modularen maximalen Rechtsidealen in einem Ring stets modular. Gilt ferner $R_1+R_2=A$ für die modularen Rechtsideale R_i des Ringes $A (i=1, 2)$, so soll $R_1 \cap R_2$ ebenfalls modular in A sein.

Besitze H im folgenden die Eigenschaft E.

Dann ist H periodisch. Hat nämlich H ein Element unendlicher Ordnung, so besitzt H auch eine echte unendliche zyklische Teilhalbgruppe $\{h\}$. Weiterhin ist dann die Teilhalbgruppe $\{h^2, h^3\}$ ebenfalls echt, endlich erzeugt, aber nicht zyklisch, was der Definition der Eigenschaft E widerspricht, und somit ist H wirklich periodisch.

Nach dem Beweise des Satzes 29.3 von Rédei [6, Seite 51] hat jede periodische zyklische Teilhalbgruppe $\{h\}$ einer Halbgruppe ein idempotentes Element e. Gibt es nämlich natürliche Zahlen m und n $(m > n)$ mit $h^m = h^n$, so ist $e = h^{m(m-n)}$ idempotent. Hiernach besteht jede endlich erzeugbare echte Teilhalbgruppe einer Halbgruppe mit der Eigenschaft E nur aus einem einzigen (idempotenten) Element e.

Es sei zuerst $H = \{h\}$.

Existiert eine natürliche Zahl $k \geqq 2$ mit $\{h^k\} = H$, so gilt $h = h^{kk_1}$ mit einer geeigneten natürlichen Zahl k_1, und somit ist dann $f = h^{kk_1 - 1}$ das Einselement der Halbgruppe H, die jetzt eine zyklische Gruppe ist. Da für jeden Teiler d der Ordnung von H eine Teilgruppe der Ordnung d gibt, und da H die Eigenschaft E besitzt, ist H eine Gruppe von Primzahlordnung. Das ist der Fall I) im Satz 1.

Existiert aber keine natürliche Zahl $k \geqq 2$ mit $\{h^k\} = H$, so ist nach dem vorigen h^k für jedes $k \geqq 2$ idempotent. Ist k_0 die kleinste solche natürliche Zahl, für die h^{k_0} nicht mit einer Potenz h^l mit $l < k_0$ übereinstimmt, so ist gewiß $k_0 = 1$. Es sei nämlich $k_0 \geqq 2$. Im Falle $k_0 = 2s$ ergibt sich $h^{k_0} = h^{2s} = h^s$ mit $k_0 > s$, und im Falle $k_0 = 2s + 1$ erhält man $h^{k_0} = (h^s)^2 h = h^s \cdot h = h^{s+1}$ mit $k_0 > s + 1$ die der Minimalität von k_0 widersprechen. Es gilt also $k_0 = 1$, woraus $h^2 = h$ folgt. Das ist der Fall II) im Satz 1.

Zum Schluß nehmen wir an, daß H durch kein Element $h \in H$ erzeugt werden kann. Dann gilt $g^2 = g$ für jedes $g \in H$, und $H = \{g, h\}$ für beliebige voneinander verschiedene Elemente g und h von H. Hiernach sind höchstens die Elemente

$$g, h, gh, hg, ghg, hgh$$

die formal verschiedenen Elemente von H. Diese sechs Elemente dürfen aber übereinstimmen.

Besteht $g = hgh$ oder $h = ghg$, so erhält man aus der ersten Gleichung:

$$g = hg = gh = ghg = hgh,$$

oder aus der zweiten Gleichung

$$h = gh = hg = hgh = ghg.$$

Hiernach ist H in beiden Fällen eine kommutative Halbgruppe der Ordnung zwei, die ein echtes Ideal enthält, dessen einziges Element idempotent ist. Das ist der Fall III) im Satz 1.

Gilt aber weder $g=hgh$, noch $h=ghg$, so ergibt sich nach dem vorigen, daß

$$H=\{g, hgh\}=\{h, ghg\}.$$

Da $x^2=x$ für jedes $x\in H$, ferner $g\in H$, $h\in H$, $g\neq h$, erhält man hieraus, daß

$$g=ghg \quad \text{und} \quad h=hgh.$$

Das ist der Fall IV) im Satz 1 mit $i=gh$ und $j=hg$.

Damit haben wir alle Halbgruppen mit der Eigenschaft E explizit bestimmt. Umgekehrt besitzt jede im Satz 1 vorkommene Halbgruppe die Eigenschaft E, womit Satz 1 bewiesen ist.

Aus dem Satz 1 ergibt sich leicht:

Folgerung 2. Die im Satz bei IV) vorkommene Halbgruppe ist die einzige *nichtkommutative* Halbgruppe mit der Eigenschaft E. Diese ist zur Lajosschen Lösung des Rédeischen Problems isomorph.

Als eine simultane Lösung des zweiten (Rédeischen) und des dritten (Kertészschen) Problems erhält man den folgenden

Satz 3. *Es gibt einen endlichen nichtkommutativen Ring A der Ordnung* 16, *der folgende Eigenschaften besitzt:*

I) *A hat zwei solche modulare nilpotente Rechtsideale, deren Durchschnitt nicht modular in A ist;*

II) *das Jacobsonsche Radikal J von A ist selbst ein modulares maximales Rechtsideal in A, für das $J^2\neq 0$ und $J^3=0$ bestehen;*

III) *die Elemente von A bilden bezüglich der Kreisverknüpfung $x\circ y=x+y-xy$ eine Halbgruppe H_1, die eine nichtkommutative Teilhalbgruppe H_2 der Ordnung vier und mit der Eigenschaft E enthält, derart, daß die Frattinische Teilhalbgruppe von H_2 leer ist, obwohl eine Teilmenge in H_2 keine Halbgruppe ist.*

Beweis. Der Ring A sei über dem Primkörper K_2 mit zwei Elementen 0 und 1 durch die Basiselemente a, b, c und d erzeugte Algebra, für die die folgende Multiplikationstabelle gilt:

	a	b	c	d
a	a	$a+b+c$	a	d
b	$a+b+d$	b	c	b
c	c	b	c	$a+c+d$
d	a	d	$b+c+d$	d

Diese Algebra ist offenbar nicht monomial (vgl. Rédei [6]), denn die Produkte der Basiselemente sollen i.a. keine Skalarmehrfache eines Basiselementes sein. Dagegen ist die Multiplikation von A nach einem unmittelbaren Rechnen assoziativ. Da jedes Element von A eine kanonische Form

$$x = \varrho_1 a + \varrho_2 b + \varrho_3 c + \varrho_4 d \qquad (\varrho_i \in K_2)$$

besitzt, hat A 16 Elemente.

Die Rechtsideale $R_1 = (1+a)A$ und $R_2 = (1+b)A$ von A sind offenbar modular. Man erhält weiterhin $a+c \neq b+d$, $(a+c)^2 = a+a+c+c = 0$ und ähnlich $(b+d)^2 = 0$. Da R_1 nur die Elemente 0 und $a+c$ enthält, ist R_1 kein maximales Rechtsideal von A, aber R_2 ist nilpotent mit $R_1^2 = 0$. Ähnlich ist R_2 ein nilpotentes Rechtsideal, das nicht maximal in A ist. Wegen $a+c \neq b+d$ ergibt sich $R_1 \cap R_2 = 0$.

Dieser Durchschnitt ist dann und nur dann modular in A, wenn A ein Linkseinselement enthält. Ist

$$e = \sigma_1 a + \sigma_2 b + \sigma_3 c + \sigma_4 d \qquad (\sigma_i \in K_2)$$

die kanonische Form eines Linkseinselementes e von A, so erhält man wegen

$$ea = a, \quad eb = b, \quad ec = c \quad \text{und} \quad ed = d$$

einerseits $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = 0$, andererseits $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = 1$ mit $\tau_j = \sum_{i \neq j} \sigma_i$, die offenbar im Widerspruch zueinander stehen. Daher existiert kein Linkseinselement e in A, und somit ist der Durchschnitt $R_1 \cap R_2 = 0$ der modularen Rechtsideale R_1 und R_2 nicht modular in A.

Das Rechtsideal $R = (1+a)A + (1+b)A$ ist ebenfalls nilpotent, und R ist nach einem unmittelbaren Rechnen ein zweiseitiges Ideal von A. Der Faktorring A/R der Ordnung vier ist weder kommutativ, noch halbeinfach. Es gilt dabei auch $R^2 = 0$.

Das Radikal J von A ist das durch R und $a+b$ erzeugte Ideal, also gilt

$$J = (R, a+b).$$

Weiterhin enthält J die folgenden acht Elemente:

$$0, a+b, a+c, a+d, b+c, b+d, c+d, a+b+c+d.$$

Man kann wegen $a+b+c+d \in J^2$ auch $J^2 \neq 0$ und leicht $J^3 = 0$ bestätigen. Da $A/J \cong K_2$ ein Körper ist J selbst ein modulares maximales Rechtsideal von A.

Betrachten wir zum Schluß die adjungierte Halbgruppe H_1 des Ringes A, die bekanntlich die Menge aller Ringelemente mit der Kreisverknüpfung $x \circ y = x + y - xy$ bedeutet. Die Basiselemente a, b, c und d der Algebra A erzeugen in der adjungierten Halbgruppe H_1 eine Teilhalbgruppe H_2. Diese Halbgruppe H_2 ist aber nach den Zuordnungen

$$a \leftrightarrow g, \quad b \leftrightarrow h, \quad c \leftrightarrow i, \quad d \leftrightarrow j$$

zur im Satz 1 bei IV) vorkommenden Halbgruppe isomorph, und somit hat H_2 ebenfalls die Eigenschaft E. Weiterhin ist die Menge $[a, b]$ wegen $a \circ b = c \neq a$ und $c \neq b$ keine Teilhalbgruppe von H_2. Da die Teilhalbgruppen $\{a\}$ und $\{b\}$ maximal in $(H_2 \circ)$ sind und einen leeren Durchschnitt haben, ist die Frattinische Teilhalbgruppe Φ der Halbgruppe H_2 leer.

Damit haben wir Satz 3 bewiesen.

Es soll bemerkt werden, daß Verfasser [11] ein Frattinisches Rechtsideal der Halbgruppen mit Nullelement von einem anderen Gesichtspunkt aus betrachtet hat.

Die Halbgruppen mit leerer Frattinischer Teilhalbgruppe wurden ausführlicher von H. J. WEINERT [14] untersucht.

Wir schließen mit einigen ungelösten Problemen:

1) Gibt es für jede natürliche Zahl $n \geqq 4$ einen endlichen Ring mit den im Satz 3 erwähnten Eigenschaften, aber in II) mit der Bedingung $J^{n-1} \neq 0$ und $J^n = 0$ für das Radikal J?

2) Gilt $2A = 0$ für jeden solchen Ring (bzw. endlichen Ring) A, der eine Lösung des Kertészschen Problems ist?

3) Für welche Halbgruppen sind die echten, endlich erzeugbaren Rechtsideale (bzw. Ideale) untereinander isomorph?

4) Gibt es eine kommutative Halbgruppe H mit leerer Frattinischer Teilhalbgruppe derart, daß eine Teilmenge von H keine Halbgruppe ist?

Literatur

[1] A. H. CLIFFORD—G. B. PRESTON, *The Algebraic Theory of Semigroups*. I, II (Providence, 1961, 1967).

[2] G. E. FORSYTHE, SWAC computes 126 distinct semigroups of order 4, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6** (1955), 443—447.

[3] N. JACOBSON, *Structure of Rings* (2nd ed.) (Providence, 1964).

[4] A. KERTÉSZ, *Vorlesungen über Artinsche Ringe* (Budapest, 1968).

[5] S. LAJOS, On a semigroup theoretical problem of László Rédei, *Mat. Lapok*, **10** (1959), 274—277 (Ungarisch, mit englischer Zusammenfassung).

[6] L. RÉDEI, *Algebra*. I (Leipzig, 1959).

[7] F. SZÁSZ, Die Lösung eines Problems bezüglich des Durchschnittes zweier modularer Rechtsideale in einem Ring, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **20** (1969), 211—216

[8] F. SZÁSZ, Die Ringe mit lauter isomorphen nichttrivialen endlich erzeugbaren Unterringen, *Acta Sci. Math.*, **22** (1961), 196—201.

[9] F. SZÁSZ, Ringe, deren von Null verschiedene endlich erzeugbare Unterringe untereinander isomorph sind, *Rendiconti Circolo Mat. Palermo*, II. **6** (1957), 1—3.

[10] F. SZÁSZ, Die Halbgruppen, deren endlich erzeugte echte Teilhalbgruppen Hauptrechtsideale sind, *Acta Sci. Math.*, **25** (1964), 135—138.

[11] F. SZÁSZ, Radikalbegriffe für Halbgruppen mit Nullelement, die dem Jacobsonschen ringtheoretischen Radikal ähnlich sind, *Math. Nach.*, **34** (1967), 157—61.

[12] T. TAMURA, Notes on finite semigroups and determination of semigroups of order 4, *J. Gakugei Tokushima Univ.*, **5** (1954), 17—27.

[13] K. TETSUYA—T. HASHIMOTO—T. AKAZAWA—R. SHIBATA—T. INUI—T. TAMURA, All semigroups of order at most 5, *ebenda*, **6** (1955), 19—39.

[14] H. J. WEINERT, Halbgruppen ohne Frattinische Unterhallgruppe, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **15** (1964), 309—323.

(Eingegangen am 1. August 1968 und in umgearbeiteter Form am 27. Dezember 1968)

On complete systems of automata

By F. GÉCSEG in Szeged

It was shown in [6] that there exists no finite complete system of finite automata with respect to R-product. In this paper we show that there exists no system of finite automata which is minimal and isomorphically complete with respect to quasidirect product. Analogous statements are valid with respect to quasi-superposition and R-product.

In order to investigate these questions we need some notions and notations (see also [1]–[4]).

A system $\mathfrak{A}$ of Mealy automata¹) is said to be *isomorphically complete* with respect to R-product (quasi-direct product, quasi-superposition) if for every automaton $\mathbf{A}$ an R-product (quasi-direct product, quasi-superposition) $\mathbf{B}$ of automata from $\mathfrak{A}$ can be found such that $\mathbf{A}$ is A-isomorphic to some A-subautomaton of $\mathbf{B}$.

Let $\mathbf{A}=\mathbf{A}(X, A, Y, \delta, \lambda)$ be an arbitrary automaton. A partition π of A into disjoint subsets is called a *congruent partition* of $\mathbf{A}$ if for every $a, b \in A$ and $x \in X$

$$a \equiv b(\pi) \Rightarrow \delta(a, x) \equiv \delta(b, x)\ (\pi)$$

holds (see [5]).

An arbitrary automaton $\mathbf{A}=\mathbf{A}(X, A, Y, \delta, \lambda)$ is said to be an *x-prime automaton* ($x \in X$) if for some $a \in A$ the number of states of the automata $\mathbf{A}$ and $\mathbf{A}^{(a,x)}$ (see [7]) is the same prime number p and there exists a permutation

$$\begin{pmatrix} 1 \cdots p \\ 1' \cdots p' \end{pmatrix}$$

such that

$$\delta(a_{i'}, x) = \begin{cases} a_{(i+1)'} & \text{if } i' < p' \\ a_{1'} & \text{if } i' = p' \end{cases} \qquad (A = \langle a_1, \ldots, a_p \rangle).$$

It follows from the proof of Lemma and Theorem of [7] that if the automaton $\mathbf{A}=\mathbf{A}(X, A, Y, \delta, \lambda)$ is x-prime for some $x \in X$, then $\mathbf{A}$ has only trivial partitions.

¹) By "automaton" we always mean a finite automaton.

We require the following lemmas:

Lemma 1. *If* $\mathfrak{A} = \langle A_1, \mathbf{A}_2, \ldots \rangle$ *is a system of automata which is isomorphically complete with respect to quasi-direct product and if for some* i, j $(i \neq j)$ *the automaton* A_i^* *can be isomorphically embedded into* $\mathbf{A}_j^*$, [2]) *then the system* $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \setminus \langle \mathbf{A}_i \rangle$ *is also isomorphically complete with respect to quasi-direct product.*

The statements of Lemma 1 are trivial.

Lemma 2. *If an x-prime automaton* $\mathbf{A}$ *with reduced inputs* [3]) *can be A-isomorphically embedded into some quasi-direct product*

$$\prod_{i=1}^{k} \mathbf{A}_i[X, Y, \varphi, \psi]$$

of automata $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_i(X_i, A_i, Y_i, \delta_i, \lambda_i)$ $(i = 1, \ldots, k)$, *then for some* i $(1 \leqq i \leqq k)$ *the automaton* $\mathbf{A}^*$ *can be* (X, A)*-isomorphically embedded into* $\mathbf{A}_i^*$.

Proof. Suppose the condition of Lemma 2 is true. Then,

$$a = (a_1, \ldots, a_k) \qquad (a_i \in A_i;\ i = 1, \ldots, k)$$

holds for arbitrary $a \in A$. The following partitions π_i $(i = 1, \ldots, k)$ are congruent:

$$a(= (a_1, \ldots, a_k)) \equiv ((a_1', \ldots, a_k') =)a'(\pi_i) \Leftrightarrow a_i = a_i',$$

because by virtue of the definition of quasi-direct product we have

$$\varphi(a, x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_i(x), \ldots, \varphi_k(x))$$

for arbitrary $x \in X$.

Since $\mathbf{A}$ is an x-prime automaton, it has only trivial partitions. From this it follows that there exists an i $(1 \leqq i \leqq k)$ such that for arbitrary $a, a' \in A$

$$(1) \qquad a(= (a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_k)) \neq ((a_1', \ldots, a_i', \ldots, a_k') =)a' \Rightarrow a_i \neq a_i'.$$

Consider the maps $\varrho_1 : X \to X_i$ and $\varrho_2 : A \to A_i$ defined by

$$\varrho_1(x) = \varphi_i(x) \quad \text{and} \quad \varrho_2(a) = a_i,$$

where $a = (a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_k)$.

It is clear that, by virtue of (1), the map ϱ_2 is one-to-one. We show that ϱ_1 and ϱ_2 are homomorphisms.

---

[2]) A^* is the Medvedev automaton obtained from A in a natural way (see [1]).

[3]) An automaton with reduced input is defined to be an automaton such that different inputs will induce different maps of the set of states.

Take $a=(a_2, ..., a_i, ..., a_k)$, that is, $\varrho_2(a)=a_i$ and $\varrho_1(x)=\varphi_i(x)=x_i$. Then

$$\varrho_2(\delta(a,x)) = \varrho_2(\delta_1(a_1, x_1), \dots, \delta_i(a_i, x_i), \dots, \delta_k(a_k, x_k)) =$$
$$= \varrho_2\big(\delta_1(a_1, \varphi_1(x)), \dots, \delta_i(\varrho_2(a), \varrho_1(x)), \dots, \delta_k(a_k, \varphi_k(x))\big) = \delta_i(\varrho_2(a), \varrho_1(x)).$$

The map ϱ_1 is one-to-one since **A** is an automaton with reduced input. This proves that the pair (ϱ_1, ϱ_2) is an (X, A)-isomorphism of $\mathbf{A}^*$ into A_i^*. This completes the proof of Lemma 2.

Using Lemma 1 and 2, we can prove:

Theorem 1. *There is no system of automata which is minimal and isomorphically complete with respect to quasi-direct product.*

Proof. Let $\mathfrak{A}=\langle \mathbf{A}_i=\mathbf{A}_i(X_i, A_i, Y_i, \delta_i, \lambda_i) | i=1, 2, \dots\rangle$ be an arbitrary system of automata, which is isomorphically complete with respect to quasi-direct product. We have to show that for arbitrary $\mathbf{A}_i$ the system $\mathfrak{A}'=\mathfrak{A}\setminus\langle\mathbf{A}_i\rangle$ is also isomorphically complete with respect to quasi-direct product. This already gives the proof of Theorem 1.

Let $\mathbf{A}=\mathbf{A}(X, Y, A, \delta, \lambda)$ be an automaton with reduced inputs which is an x-prime automaton for some $x\in X$ and such that the automaton $\mathbf{A}_i^*$ can be embedded (X, A)-isomorphically into $\mathbf{A}^*$, furthermore let $\bar{\bar{\mathbf{A}}} > \bar{\bar{\mathbf{A}}}_i$. Such an automaton **A** exists. Indeed, let p be a prime number such that $p-\bar{\bar{A}}_i > \bar{\bar{X}}_{i+1}$. Let us add to the set $A_i=\langle a_{i1}, \dots, a_{ik}\rangle$ the elements $a_{i,k+1}, \dots, a_{ip}$, and to the set X_i of inputs a symbol x which is not in X_i. We extend the state transition function δ_i for $A=\langle a_{i1}, \dots, a_{ik}, a_{ik+1}, \dots, a_{ip}\rangle$ and for $X=X_i\cup\langle x\rangle$ in the following way:

$$\delta_i(a_{il}, x) = \begin{cases} a_{il+1} & \text{if} \quad i_l < p, \\ a_{i1} & \text{if} \quad i_l = p, \end{cases}$$

and let $\delta_i(a_{il}, x_i)$ $(x_i\in X_i)$ be an arbitrary element of A such that **A** is an automaton with reduced input. This is possible since $p-\bar{\bar{\mathbf{A}}}_i > X_{i+1}$. The function λ can be chosen arbitrarily.

Because the system $\mathfrak{A}$ is isomorphically complete with respect to quasi-direct product, the automaton **A** can be embedded A-isomorphically in a quasi-direct product of automata from $\mathfrak{A}$. In this way, by Lemma 2, the automaton $\mathbf{A}^*$ can be embedded (X, A)-isomorphically in an automaton $\mathbf{A}_j^*$ $(\mathbf{A}_j\in\mathfrak{A})$. We have $j\neq i$ because $\bar{\bar{A}} > \bar{\bar{A}}_i$. Since $\mathbf{A}_i^*$ can be embedded (X, A)-isomorphically in $\mathbf{A}^*$, it can be embedded (X, A)-isomorphically in $\mathbf{A}_j^*$, that is, by Lemma 1, $\mathfrak{A}'=\mathfrak{A}\setminus\langle\mathbf{A}_i\rangle$ is an isomorphically complete system with respect to quasi-direct product.

We now prove that there exists no system of automata which is minimal and isomorphically complete with respect to quasi-superposition. In order to prove this statement we need the following trivial

Lemma 3. *If $\mathfrak{A}=\langle \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots\rangle$ is a system of automata which is isomorphically complete with respect to quasi-superposition and if for some i, j $(i\neq j)$ the automaton $\mathbf{A}_i^*$ can be isomorphically embedded into $\mathbf{A}_j^*$, then the system $\mathfrak{A}'=\mathfrak{A}\setminus\langle \mathbf{A}_i\rangle$ is also isomorphically complete with respect to quasi-superposition.*

We also need the following

Lemma 4. *If an x-prime automaton $\mathbf{A}=\mathbf{A}(X, A, Y, \delta, \lambda)$ with reduced input can be A-isomorphically embedded into some quasi-superposition $\mathbf{A}_1^{(\gamma_1, \lambda_1)}\ldots\mathbf{A}_k^{(\gamma_k, \lambda_k)}$ of automata $\mathbf{A}_i=\mathbf{A}_i(X_i, A_i, Y_i, \delta_i, \lambda_i)$ $(i=1, \ldots, k)$, then for some $i\,(1\leqq i\leqq k)$ the automaton $\mathbf{A}^*$ can be (X, A)-isomorphically embedded into $\mathbf{A}_i^{(\gamma_i, \lambda_i)*}$.*

Proof. Under the condition of the lemma, we have $a=(a_1, \ldots, a_k)$ for an arbitrary $a\in A$.

It is obvious that the following partitions π_i $(i=1, \ldots, k)$ of $\mathbf{A}$ are congruent:

$$a(=(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_k))\equiv((a_1', \ldots, a_i', \ldots, a_k')=)a'(\pi_i)\Leftrightarrow a_j=a_j' \qquad (j=1, \ldots, i).$$

Since $\mathbf{A}$ is an x-prime automaton so it has only trivial partitions. From this it follows that there is an $i\,(1\leqq i\leqq k)$ such that for arbitrary $a, a'\in A$ we have

$$a(=(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_k))\neq((a_1', \ldots, a_i', \ldots, a_k')=)a'\Rightarrow a_i\neq a_i'. \tag{2}$$

Let j be the minimum of the numbers i satisfying (2). If $j\geqq 2$, then

$$a_1=a_1', \ldots, a_{j-1}=a_{j-1}'$$

hold for $l=1, \ldots, j-1$ and arbitrary $a, a'\in A$.

We now show that $\mathbf{A}^*$ can be (X, A)-isomorphically embedded in to $\mathbf{A}_j^{(\gamma_j, \lambda_j)*}$. A suitable (X, A)-isomorphism (ϱ_1, ϱ_2) is the following:

$$\varrho_1(x)=\lambda_j(a_{j-1}, \gamma_{j-1}(\ldots, \gamma_2(\lambda_1(a_1, \gamma_1(x)))\ldots)), \quad \varrho_2(a)=a_j,$$

where a_m $(m=1, 2, \ldots, j)$ is the mth component of a.

The map ϱ_1 is one-to-one since $\mathbf{A}$ is an automaton with reduced inputs. It follows from (2) that ϱ_2 is a 1—1 map. Since, by the choice of j,

$$\delta_l(a_l, \gamma_l(\lambda_{l-1}(a_{l-1}, \gamma_{l-1}(\ldots, \gamma_2(\lambda_1(a_1, \gamma_1(x)))\ldots))))=a_l$$

holds for each $x\in X$ and $l\,(1\leqq l\leqq j-1)$, where $a_1, \ldots, a_{l-1}, a_l$ are components of a, the pair (ϱ_1, ϱ_2) is an (X, A)-isomorphism.

It is clear that if $j=1$ then the isomorphism (ϱ_1, ϱ_2) can be given in the form

$$\varrho_1(x)=x \quad\text{and}\quad \varrho_2(a)=a_1,$$

where a_1 is the first component of a. This concludes the proof of Lemma 4.

If we repeat the proof of Theorem 1, using Lemma 3 and 4 instead of Lemma 1 and 2, respectively, and the quasi-superposition instead of quasi-direct product, we get the following

Theorem 2. *There exists no system of automata which is minimal and isomorphically complete with respect to quasi-superposition.*

We also have the following

Theorem 3. *There is no system of automata which is minimal and isomorphically complete with respect to R-product.*

Theorem 3 obviously follows from Theorem 2 and the following

Theorem 4. *An automaton* $\mathbf{A}=\mathbf{A}(X, A, Y, \delta, \lambda)$ *is an R-product of automata* $\mathbf{A}_i=\mathbf{A}_i(X_i', A_i, Y_i', \delta_i', \lambda_i')$ $(i=1, \ldots, k)$ *if and only if* $\mathbf{A}$ *is a quasi-superposition of the same automata* $\mathbf{A}_i$ $(i=1, \ldots, k)$.

Proof. The necessity is obvious because quasi-superpositions are special cases of R-products.

Conversely, let $\mathbf{A}$ be an R-product of automata A_i $(i=1, \ldots, k)$, that is,

$$\mathbf{A} = \prod_{i=1}^{k} \mathbf{A}_i[X, Y, \varphi, \psi].^{4)}$$

It is well-known (see [8]) that an arbitrary partially ordering R of a finite set can be extended to an ordering R'. Let R' be such an extension of the partialy ordering R of the set $\langle \mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k \rangle$.

Now let us consider the following automaton

$$\mathbf{A}_i^{(\gamma_i, \lambda_i)} = \mathbf{A}_i^{(\gamma_i, \lambda_i)}(X_i, A_i, Y_i, \delta_i, \lambda_i),$$

where

(3) $$X_i = \begin{cases} X & \text{if } i = 1, \\ A_1 \times \cdots \times A_{i-1} \times X & \text{if } i > 1, \end{cases}$$

(4) $$Y_i = \begin{cases} A_1 \times \cdots \times A_i \times X & \text{if } i < k, \\ Y & \text{if } i = k, \end{cases}$$

(5) $$\gamma_i((a_1, \ldots, a_{i-1}, x)) = \varphi_i(a_1, \ldots, a_{i-1}, x) \qquad (x \in X;\ a_j \in A_j;\ j = 1, \ldots, i-1)$$

and

(6) $$\lambda_i(a_i, (a_1, \ldots, a_{i-1}, x)) = \begin{cases} (a_1, \ldots, a_{i-1}, x) & \text{if } 1 \leqq i < k, \\ \psi(a_1, \ldots, a_k, x) & \text{if } i = k. \end{cases}$$

---

4) Here we suppose that R is a partial ordering such that $\mathbf{A}_i$ is not greater than $\mathbf{A}_j$ with respect to R if $i \geqq j$. (This is possible, see [8]).

The maps γ_i in (5) are well-defined because R' is an extension of R.

Let $\mathbf{A}' = \mathbf{A}'(X, A', Y, \delta', \lambda')$ be the superposition of $A_i^{(\gamma_i, \lambda_i)}$ $(i=1, \ldots, k)$, that is, $\mathbf{A}'$ is a quasi-superposition of the automata $\mathbf{A}_i$ with respect to the system $\langle X_i, Y_i, \delta_i, \lambda_i \mid i=1, \ldots, k\rangle$. It is clear that $A = A'$.

We show that the maps $(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$, where

$$\varrho_1(x)=x,\ \varrho_2(a)=a,\ \varrho_3(y)=y \quad (x \in X, a \in A, y \in Y),$$

induce an isomorphism between $\mathbf{A}$ and $\mathbf{A}'$. Indeed, let $x \in X$ and $a \in A$ be arbitrary. Then

$$\varrho_2(\delta((a_1, \ldots, a_k), x)) = \varrho_2(\delta_1'(a_1, \varphi_1(x)), \ldots, \delta_k'(a_k, \varphi_k(a_1, \ldots, a_{k-1}, x))) =$$
$$= (\delta_1'(a_1, \varphi_1(x)), \ldots, \delta_k'(a_k, \varphi_k(a_1, \ldots, a_{k-1}, x)))$$

and

$$\delta'(\varrho_2(a_1, \ldots, a_k), \varrho_1(x)) = (\delta_1'(a_1, \gamma_1(x)), \ldots, \delta_k'(a_k, \gamma_k(a_1, \ldots, a_{k-1}, x))) =$$
$$= (\delta_1'(a_1, \varphi_1(x)), \ldots, \delta_k'(a_k, \varphi_k(a_1, \ldots, a_{k-1}, x)))$$

(because $\gamma_i(a_1, \ldots, a_{i-1}, x) = \varphi_i(a_1, \ldots, a_{i-1}, x)$ by virtue of (5)), that is,

$$\varrho_2(\delta((a_1, \ldots, a_k), x)) = \delta'(\varrho_2(a_1, \ldots, a_k), \varrho_1(x)).$$

Furthermore,

$$\varrho_3((\lambda(a_1, \ldots, a_k), x)) = \varrho_3(\psi(a_1, \ldots, a_k, x)) = \psi(a_1, \ldots, a_k, x)$$

(where ψ is the output function of $\mathbf{A}$) and

$$\lambda'(\varrho_2(a_1, \ldots, a_k), \varrho_1(x)) = \lambda'((a_1, \ldots, a_k), x) =$$
$$= \lambda_k(a_k, (a_1, \ldots, a_{k-1}, x)) = \psi(a_1, \ldots, a_k, x),$$

the last equality being valid by virtue of (6), that is,

$$\varrho_3(\lambda(a_1, \ldots, a_k), x) = \lambda'(\varrho_2(a_1, \ldots, a_k), \varrho_1(x)).$$

This completes the proof of the Theorem 4.

References

[1] F. Gécseg, On R-products of automata. I, *Studia Sci. Math. Hung.*, **1** (1966), 437—441.

[2] F. Gécseg, On R-products of automata. II, *Studia Sci. Math. Hung.*, **1** (1966), 443—447.

[3] F. Gécseg, On R-products of automata. III, *Studia Sci. Math. Hung.*, **2** (1967), 163—166.

[4] W. M. Gluschkow, *Theorie der abstrakten Automaten* (Berlin, 1963).

[5] J. Hartmanis, Loop-free structure of sequential machines, *Information and Control*, **1** (1962), 25—44.

[6] Ф. Гечег, О композиции автоматов без петель, *Acta Sci. Math.*, **26** (1965), 269—272.

[7] Ф. Гечег, О группе взаимно однозначных преобразований, определенных конечными автоматами, *Кибернетика*, **1:1** (1965), 37—40.

[8] E. Szpilrajn, Sur l'extension de l'ordre partiel, *Fund. Math.*, **16** (1930), 386—389.

(Received May 25, 1968)

On a problem of P. Erdős

By EÖRS MÁTÉ in Szeged

In this note we are going to prove the following

Theorem. *Suppose that for an additive number theoretic function* [1] $f(n)$ *the difference* $f(n+1)-f(n)$ *is bounded. Then there exists a decomposition* $g(n)+h(n)$ *of* $f(n)$ *wherein* $g(n)$ *is completely additive* [2] *and* $h(n)$ *is bounded.*

The uniqueness of this decomposition is most obvious. In fact, assuming its existence we have

$$g(n) = \lim_{t\to\infty} \frac{f(n^t)}{t} \quad \text{and} \quad h(n) = f(n) - g(n).$$

The above theorem was conjectured by P. ERDŐS [1], p. 3, in a stronger form where he asserts that in the above decomposition $g(n)$ must be a constant multiple of $\log n$. (For the restating of the problem see [2], p. 6 and [3], p. 162.) As yet we have not been able to overcome the difficulties in deciding whether or not this latter assertion is true.

In order to prove the above theorem we show the existence of the limit $g(n) = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{f(n^t)}{t}$ and prove its coincidence with $f(n)$ apart from a bounded term. First we prove three lemmas in which M will be a bound for the expression $|f(n+1)-f(n)|$.

Lemma 1. *If s is prime to $n-1$ then*

$$|f(n^s) - sf(n)| \leqq 2sM.$$

Proof. As is easily seen

$$s = \sum_{i=0}^{s-1} 1 \equiv \sum_{i=0}^{s-1} n^i \,(\operatorname{mod} n-1);$$

[1]) I.e. for a function defined on the set of positive integers satisfying the relation $f(ab) = f(a)+f(b)$ whenever a is prime to b.

[2]) I.e. $g(ab) = g(a)+g(b)$ for any two positive integers a and b.

thus by the assumptions of the lemma we have that $\sum_{i=0}^{s-1} n^i$ is prime to $n-1$ as well. So an easy calculation shows (note $f(1)=0$):

$$|f(n^s)-sf(n)| \leqq |f(n^s-1)-sf(n)|+M =$$

$$= \left|f\left((n-1)\sum_{i=0}^{s-1} n^i\right)-sf(n)\right|+M \leqq M+|f(n-1)-f(n)|+\left|f\left(\sum_{i=0}^{s-1} n^i\right)-(s-1)f(n)\right| \leqq$$

$$\leqq 2M+\left|\sum_{j=1}^{s-1}\left(f\left(\sum_{i=0}^{j} n^i\right)-f\left(\sum_{i=0}^{j-1} n^i\right)-f(n)\right)\right| \leqq$$

$$\leqq 2M+\sum_{j=1}^{s-1}\left|f\left(\sum_{i=0}^{j} n^i\right)-f\left(\sum_{i=0}^{j} n^i-1\right)\right| \leqq (s+1)M \leqq 2sM. \qquad \text{Q.E.D.}$$

Lemma 2. *For any two integers $k \geqq 0$ and $n>0$ we have*

$$|f(n^{2^k})-2^k f(n)| \leqq 4\cdot 2^k M.$$

Proof. If n is even, then the previous lemma involves this estimation with $2\cdot 2^k M$ on the right-hand side. The case if n is odd is easily derived from this latter result as follows:

$$|f(n^{2^k})-2^k f(n)| = |f((2n)^{2^k})-f(2^{2^k})-2^k f(2n)+2^k f(2)| \leqq$$
$$\leqq |f((2n)^{2^k})-2^k f(2n)|+|f(2^{2^k})-2^k f(2)| \leqq 2\cdot 2^k M+2\cdot 2^k M = 4\cdot 2^k M.$$

Lemma 3. *For any two positive integers s and t we have*

$$|f(n^t)-f(n^s)| \leqq 4|t-s|nM.$$

Proof. Suppose that e.g. $t>s$; then

$$|f(n^t)-f(n^s)| \leqq 2M+|f(n^t-1)-f(n^s-1)| \leqq$$

$$\leqq 2M+\sum_{i=s+1}^{t} |f(n^i-1)-f(n^{i-1}-1)-f(n)|+(t-s)|f(n)| =$$

$$= 2M+\sum_{i=s+1}^{t} |f(n^i-1)-f(n^i-n)|+(t-s)|f(n)| \leqq 2M+2(t-s)(n-1)M \leqq$$
$$\leqq 4(t-s)nM.$$

Here we made use of the trivial estimation

$$|f(n)| \leqq \sum_{i=1}^{n-1} |f(i+1)-f(i)| \leqq (n-1)M.$$

Thus the lemma is proved.

As an easy consequence of the above lemmas we have the existence of the limit

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f(n^t)}{t}.$$

Indeed, this is simple if t runs only over numbers of form 2^k since by Lemma 2 we have for $k_1, k_2\to\infty$:

$$\left|\frac{f(n^{2^{k_1}})}{2^{k_1}}-\frac{f(n^{2^{k_2}})}{2^{k_2}}\right| \leqq \frac{1}{2^{k_1}}\left|f(n^{2^{k_1}})-\frac{f(n^{2^{k_1+k_2}})}{2^{k_2}}\right|+$$

$$+\frac{1}{2^{k_2}}\left|\frac{f(n^{2^{k_2+k_1}})}{2^{k_1}}-f(n^{2^{k_2}})\right|\leqq 4M\left(\frac{1}{2^{k_1}}+\frac{1}{2^{k_2}}\right)\to 0;$$

thus writing

$$g(n)=\lim_{k\to\infty}\frac{f(n^{2^k})}{2^k},$$

we have in particular

$$\left|\frac{f(n^{2^k})}{2^k}-g(n)\right|\leqq\frac{4M}{2^k}. \tag{1}$$

Now putting k large and fixed we have, if s runs over the primes to $n^{2^k}-1$, by Lemma 2 and Lemma 1 and by (1):

$$\left|\frac{f(n^s)}{s}-g(n)\right|\leqq$$

$$\leqq\frac{1}{s}\left|f(n^s)-\frac{1}{2^k}f(n^{s2^k})\right|+\frac{1}{2^k}\left|\frac{1}{s}f(n^{s2^k})-f(n^{2^k})\right|+\left|\frac{1}{2^k}f(n^{2^k})-g(n)\right|\leqq$$

$$\leqq\frac{4M}{s}+\frac{2M}{2^k}+\frac{4M}{2^k};$$

thus, for s running over the primes to $n^{2^k}-1$, we have

$$\limsup_{s\to\infty}\left|\frac{f(n^s)}{s}-g(n)\right|\leqq\frac{6M}{2^k}. \tag{2}$$

Now if $t\to\infty$ arbitrarily, $s\to\infty$ as above, and $s\leqq t<s+n^{2^k}$, then we have by Lemma 3:

$$\left|\frac{f(n^t)}{t}-\frac{s}{t}\frac{f(n^s)}{s}\right|=\frac{1}{t}\left|f(n^t)-f(n^s)\right|\leqq 4\frac{M}{t}(t-s)n\to 0;$$

thus if we make use of (2) and take into account that $\frac{s}{t}\to 1$ we have

$$\limsup_{t\to\infty}\left|\frac{f(n^t)}{t}-g(n)\right|\leqq\frac{6M}{2^k}.$$

The left-hand side, however, does not depend on k. So by making $k \to \infty$ we obtain

$$\limsup_{t\to\infty} \left| \frac{f(n^t)}{t} - g(n) \right| = 0, \quad \text{i.e.} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{f(n^t)}{t} = g(n).$$

Here t tends to infinity arbitrarily.

It is obvious that here $g(n)$ is completely additive. In fact, we have

$$g(n^r) = \lim_{t\to\infty} \frac{f(n^{rt})}{t} = r \lim_{t\to\infty} \frac{f(n^{rt})}{rt} = r \lim_{t\to\infty} \frac{f(n^t)}{t} = rg(n),$$

which combined with the additivity of $g(n)$ implies complete additivity. On the other hand $h(n) = f(n) - g(n)$ is bounded; actually $|h(n)| \leqq 4M$, as inequality (1) shows with $k=0$. Thus the theorem is proved.

References

[1] P. ERDŐS, On the distribution function of additive function, *Ann. of Math.*, **47** (1946), 1—20.
[2] P. ERDŐS, On the distribution function of additive arithmetical functions and on some related problems, *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano*, **27** (1958), 45—49.
[3] A. MÁTÉ, A new proof of a theorem of P. Erdős, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **18** (1967), 159—162.

BOLYAI INSTITUTE
SZEGED, HUNGARY

(Received July 15, 1968)

Some results and problems in the theory of additive functions

By I. KÁTAI in Budapest

1. A function $f(n)$ of a positive integer is said to be restrictedly additive (or, simply, additive) if $(n_1, n_2)=1$ implies $f(n_1 n_2)=f(n_1)+f(n_2)$. If this equation is satisfied for any pair of integers n_1, n_2, then we say that $f(n)$ is completely (or totally) additive.

P. ERDŐS [1] has proved the following two assertions.

(A) *If $f(n)$ is restrictedly additive and monotonic then it is a constant multiple of* $\log n$.

(B) *If $f(n)$ is restrictedly additive and $f(n+1)-f(n)\to 0$ $(n\to\infty)$ then it is a constant multiple of* $\log n$.

New proofs of these assertions have been given by several authors (for the references see for example [2]). Using the ideas of BESICOVITCH to the proof of (B) (see his paper [2]) the author proved in [3] the following assertion (C), which contains (A) and (B) as special cases and which was previously stated without proof by P. ERDŐS in [5]. This assertion was proved by A. MÁTÉ [4], too.

(C) *If $f(n)$ is restrictedly additive and*

$$\liminf_{n\to\infty}\big(f(n+1)-f(n)\big) \geqq 0$$

then it is a constant multiple of $\log n$.

Later the author proved in [6] the following generalization of (C).

(D) *If $f(n)$ is restrictedly additive and* $\liminf \Delta^k f(n)\geqq 0$ *for some integer $k\geqq 1$ where $\Delta^k f(n)$ denotes the kth difference of $f(n)$, then $f(n)$ is a constant multiple of* $\log n$.

The following assertion, which was proved in [7], is a generalization of (A).

(E) *If $f(n)$ and $g(n)$ are restrictedly additive functions and the function $h(n)=$ $=\max\big(f(n), g(n)\big)$ is increasing, then the following assertions hold:*

1) *$h(n)=c\log n+r(n)$ and $r(n)\to 0$ as $n\to\infty$. Furthermore $r(n)=0$, when all prime divisors of n are greater than a certain constant.*

2) *If $f(n)\geqq g(n)$ for almost every n, then*

$$f(n)=c\log n \quad \text{and} \quad g(n)=c\log n+\varepsilon(n),$$

where $\varepsilon(p^\alpha)\leqq 0$ for sufficiently large prime numbers p.

Let $S=\{p_1, p_2, \ldots\}$ be the set of irregular primes p_i such that $\varepsilon(p_i^{\alpha_i})>0$ for some α_i. If S contains at least two elements then $\varepsilon(p_i^\beta)\leqq 0$ for every $p_i\in S$ and for β sufficiently large.

3) *If the set of n's satisfying the condition $f(n)\geqq g(n)$ has positive lower density, smaller than one, then $h(n)=c\log n$ $(n=1, 2, \ldots)$. Furthermore $f(p^\alpha)=g(p^\alpha)=$ $=c\log p^\alpha$ $(\alpha=1, 2, \ldots)$, with the exception of at most one prime.*

2. In this paper we deal with similar questions.

Let $p, p_1, \ldots, q, q_1, \ldots$ denote prime numbers.

We say that the subset P of prime numbers is the *support* of the additive function $l(n)$, if $l(p^\alpha)=0$ for $\alpha=1, 2, \ldots$, when $p\notin P$, and $l(p^\alpha)\neq 0$ for at least one α, when $p\in P$. We say that $l(n)$ is a function of *finite support* if P contains finitely many elements only.

Let K be a fixed natural number. Let $f(n)$ and $g(n)$ be restrictedly additive functions satisfying the condition

$$g(n+K)-f(n)\to 0 \qquad (n\to\infty). \tag{2.1}$$

We prove the following

Theorem 1. *Under the assumption* (2. 1) *we have*

$$f(n) = c\log n+l_1(n), \tag{2.2}$$

$$g(n) = c\log n+l_2(n), \tag{2.3}$$

where $l_1(n)$, $l_2(n)$ are functions of finite support. Their support can contain only the prime divisors of K.

Furthermore, if $2^\alpha\|K$, then

$$\begin{cases} l_1(2^\beta) = l_2(2^\beta) \qquad (\beta = 1, \cdots, \alpha-1); \\ l_1(2^\alpha) = l_2(2^{\alpha+j}), \quad l_2(2^\alpha) = l_1(2^{\alpha+j}) \qquad (j = 1, 2, \cdots), \end{cases} \tag{2.4}$$

and if $p^\alpha\|K$ and $p\geqq 3$, then

$$\begin{cases} l_1(p^\beta) = l_2(p^\beta) \qquad (\beta = 1, \cdots, \alpha-1); \\ l_1(p^\alpha) = l_2(p^\alpha) = l_1(p^{\alpha+j}) = l_2(p^{\alpha+j}) \qquad (j = 1, 2, \cdots). \end{cases} \tag{2.5}$$

From (2. 4) *and* (2. 5) *it follows immediately, that $l_2(n+K) = l_1(n)$ for $n\geqq 1$. Conversely, if $f(n)$ and $g(n)$ satisfy the conditions stated in* (2. 2)—(2.5), *then* (2. 1) *holds.*

Proof. Let $H(n) = f(n) - g(n)$. First we deduce from (2. 1) that $H(n) = 0$ for all n coprime to K. We distinguish the cases of K being even or odd.

a) Let $2^\alpha \| K$, $\alpha \geqq 1$. From (2. 1) it follows that $g(2n+2K) - f(2n) \to H(2)$ as n tends to infinity over odd n's. By (2. 1),

$$g(2n+2K) = f(2n+K) + o(1),\ f(2n) = g(2n+K) + o(1),$$

and thus $-H(2n+K) \to H(2)$ as $n \to \infty$, $2 \nmid n$, i.e.

$$H(4k+K+2) \to -H(2) \qquad (k \to \infty).$$

According to the cases: $K+2 \equiv 0 \pmod 4$, and $K+2 \equiv 2 \pmod 4$ we have

$$H(4k) \to -H(2) \qquad (k \to \infty), \tag{2. 6$_1$}$$

$$H(2k+1) \to -2H(2) \qquad (k \to \infty). \tag{2. 6$_2$}$$

Let m be an arbitrary odd integer and n an infinite sequence of odd integers coprime to K. From (2. 6)$_1$ we have

$$-H(2) = \lim_{n \to \infty} H(4mn) = H(m) + \lim_{n \to \infty} H(4n) = H(m) - H(2).$$

Similarly, from (2. 6)$_2$

$$-2H(2) = \lim_{n \to \infty} H(mn) = H(m) + \lim_{n \to \infty} H(n) = H(m) - 2H(2).$$

Hence $H(m) = 0$.

b) Let now K be odd. We distinguish the subcases: 1) $K \equiv 1 \pmod 4$ and 2) $K \equiv -1 \pmod 4$. In the case 1) let $n \equiv 1 \pmod 4$, and in the case 2) let $n \equiv -1 \pmod 4$. Using similar arguments as in a) we have

$$H(2n+K) \to -g(4) + g(2) + f(2) = C,$$

i.e. $H(8k+l) \to C$ as $k \to \infty$ for at least one l among 1, 3, 5, 7. Hence it follows that $H(m) = 0$ for every m in the residue class $\equiv 1 \pmod 8$. Indeed, if $m \equiv 1 \pmod 8$, then choosing an infinite sequence n_j, $\equiv l \pmod 8$, such that $(n_j, K) = 1$, then $n_j m \equiv l \pmod 8$ and

$$C = \lim_{mn_j \to \infty} H(mn_j) = H(m) + \lim_{n_j \to \infty} H(n_j) = H(m) + C.$$

Using the additivity of $H(n)$ we obtain that $C = 0$.

Let now m_1, m_2 be coprime integers, $m_1 m_2 \equiv 1 \pmod 8$. Then $H(m_1) = -H(m_2)$. Hence it follows that $H(m)$ is constant in every reduced residue class mod 8. But this is possible only if $H(m) = 0$ for every odd m.

Now we prove that $H(2^\alpha)=0$ for $\alpha=1, 2, \ldots$. Let n be an integer such that $(n(n+K), 3) = 1$. Then using (2. 1) and that $H(3)=0$ we have

$$o(1) = g(n+K)-f(n) = g(3n+3K)-f(3n) = [g(3n+3K)-f(3n+2K)]+$$

$$+[f(3n+2K)-f(3n+K)]+[f(3n+K)-f(3n)] = o(1)-H(3n+2K)-H(3n+K)$$

i.e.

$$H(3n+K)+H(3n+2K)\to 0.$$

Since $(n(n+K), 3) = 1$ and $2^\beta \| 3n+K$ hold for infinitely many n, we have $H(2^\beta)=0$. Consequently, $H(n)=0$ for every n coprime to K.

We need the following

Lemma 1. *If*

$$f(n+K)-f(n)\to 0 \tag{2. 7}$$

as $n\to\infty$ over the n's coprime to K, then $f(n)=c\log n$ holds whenever $(n, K)=1$.

Proof. Firstly we deduce that $f(n)$ is totally additive in the set $(n, K)=1$, i.e. that

$$f(nm) = f(n)+f(m), \tag{2. 8}$$

whenever $(nm, K)=1$.

For this purpose let p be a prime or a prime power, $p\nmid K$, and let ν be a large integer. Let $\varepsilon>0$ and l be so large, that

$$|f(n+K)-f(n)|<\varepsilon \quad \text{if} \quad n\geqq p^l. \tag{2. 9}$$

Then

$$f(p^\nu) = f(p^\nu+Kp)+\theta_1\varepsilon p = f(p)+f(p^{\nu-1}+K)+\theta_1\varepsilon p =$$

$$= f(p)+f(p^{\nu-1}+Kp)+\theta_2\varepsilon p = \cdots = (\nu-l+1)f(p^{l-1}+K)+\nu\theta_{\nu-l}\varepsilon p$$

$$(|\theta_1|\leqq 1, \cdots, |\theta_{\nu-l}|\leqq 1).$$

Hence it follows immediately that

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{f(p^\nu)}{\nu} = f(p), \quad \text{i. e.} \quad \lim_{\nu\to\infty}\frac{f(p^\nu)}{\log p^\nu} = \frac{f(p)}{\log p}.$$

Applying this relation for $p=q^\mu$ and for $p=q$ we have

$$\frac{f(q^\mu)}{\log q^\mu} = \lim_{\nu\to\infty}\frac{f(q^{\mu\nu})}{\log q^{\mu\nu}} = \lim_{\nu\to\infty}\frac{f(q^\nu)}{\log q^\nu} = \frac{f(q)}{\log q};$$

hence $f(q^\mu)=\mu f(q)$ follows. Consequently (2. 8) holds.

Let now p be a prime. We take N large, $(N, K)=1$, and write it in the form

$$N = a_0p^\nu+a_1p^{\nu-1}+\cdots+a_\nu, \quad 0\leqq a_j<p \qquad (j=0, \cdots, \nu), \quad a_0\geqq 1.$$

Using the inequality (2. 9) we have

$$f(kN)=f(Ka_0p^\nu+\cdots+Ka_\nu)=f(Ka_0p^\nu+\cdots+Ka_{\nu-1}p)+\theta_1\varepsilon a_\nu=$$

$$=f(p)+f(Ka_0p^{\nu-1}+\cdots+Ka_{\nu-1})+\theta_2\varepsilon p=\cdots=$$

$$=(\nu-l+1)f(p)+f(Ka_0p^{l-1}+\cdots+Ka_{l-1})+\theta_{\nu-l}\varepsilon p\quad(|\theta_1|\leqq 1,\cdots,|\theta_{\nu-l}|\leqq 1).$$

Writing

$$M=\max_{m\leqq K_p l}|f(m)|$$

we have

$$f(N)=(\nu-l+1)f(p)-f(K)+\theta M+\theta\varepsilon\nu p\quad(|\theta|\leqq 1).$$

Observing that $p^\nu\leqq N<p^{\nu+1}$ we get

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\nu}{\log N}=\frac{1}{\log p}.$$

Hence

$$\lim_{\substack{N\to\infty\\(N,K)=1}}\frac{f(N)}{\log N}=\frac{f(p)}{\log p}.$$

Let now N, M be arbitrary integers such that $(N,K)=(M,K)=1$. Since

$$\frac{f(N)}{\log N}=\lim_{k\to\infty}\frac{f(N^k)}{\log N^k}=\lim_{k\to\infty}\frac{f(M^k)}{\log M^k}=\frac{f(M)}{\log M},$$

$f(N)/\log N$ is constant if $(N,K)=1$. This finishes the proof of Lemma 1.

By this we proved that under the condition (2. 1) the functions $f(n)$ and $g(n)$ have the form (2. 2), (2. 3).

Since $c\log(n+K)-c\log n\to 0$, we have $l_2(n+K)-l_1(n)\to 0$ $(n\to\infty)$. Hence we deduce the relations (2. 4), (2. 5).

Let $2^\alpha\|K$, $\beta\leqq\alpha-1$. Since there exist infinitely many n satisfying the conditions $n=2^\beta m$, $(m,K)=1$, $(n+K,K)=2^\beta$, we have $l_2(n+K)=l_2(2^\beta)$, $l_1(n)=l_1(2^\beta)$. Consequently $l_1(2^\beta)=l_2(2^\beta)$. Choosing n such that $2^{\alpha+j}\|n$ $(j\geqq 1)$ and $(n,2^{-\alpha}K)=1$, we have $2^\alpha\|n+K$ and $(n+K,2^{-\alpha}K)=1$. Hence $l_2(2^\alpha)=l_1(2^{\alpha+j})$ follows. Let $2^{\alpha+j}\|n$, $(n,2^{-\alpha}K)=1$. Then $2^\alpha\|n+K$ and $(n+K,2^{-\alpha}K)=1$. Consequently $l_1(n)=l_1(2^{\alpha+j})$, $l_2(n+K)=l_2(2^\alpha)$. Hence we obtain that $l_1(2^\alpha)=l_2(2^{\alpha+j})$ $(j\geqq 1)$. This completes the proof of (2. 4).

The proof of (2. 5) is similar and can be omitted.

From (2. 4) and (2. 5) it follows immediately, that $l_2(n+K)=l_1(n)$ for $n=1, 2, \ldots$ Consequently the relations (2. 2)—(2. 5) are sufficient to guarantee the fulfilment of (2. 1).

Remarks. 1) It would be interesting to prove the more general assertion: *If* $f_i(n)$ $(i=0, \dots, k)$ *are additive functions satisfying the condition*

$$\sum_{i=0}^{k} f_i(n+i) \to 0 \quad (n\to\infty),$$

then

$$f_i(n) = c_i \log n + l_i(n) \qquad (i=0, \dots, k),$$

where $l_i(n)$ *have finite support.* I am unable to prove this for $k \geqq 2$.

2) It seems probable that the following generalization of the conjecture of P. Erdős holds: *If* $f(n)$ *and* $g(n)$ *are additive functions such that* $g(n+1)-f(n)$ *is bounded, then* $g(n) = c\log n+v(n), f(n) = c\log n+u(n)$, *and* $u(n)$, $v(n)$ *are bounded.*

3. Now we investigate the class of additive functions satisfying

$$f(2n+1)-f(n)\to C \qquad (C \text{ is a constant}). \tag{3.1}$$

Theorem 2. *If* $f(n)$ *is a completely additive function satisfying* (3. 1), *then* $f(n)=c\log n$, $c=C/\log 2$.

Proof. Without loss of generality we may suppose $C=0$. Then we need to show that $f(n)=0$ identically.

Let N be a large integer, which we represent in the dyadical form:

$$N = 2^{\nu_1}+2^{\nu_2}+\cdots+2^{\nu_k} \quad (\nu_1>\nu_2>\cdots>\nu_k). \tag{3.2}$$

Let $\alpha(N)$ denote the length of this representation, i.e. $\alpha(N)=k$.

Using (3. 1) with $C=0$ and the total additivity of $f(n)$ we have

$$f(2n+1)-f(2n)\to -f(2) \qquad (n\to\infty). \tag{3.3}$$

Hence we get

$$f(N) = f(2^{\nu_k})+f(2^{\nu_1-\nu_k}+\cdots+2^{\nu_{k-1}-\nu_k}+1) =$$

$$= \nu_k f(2)-f(2)+f(2^{\nu_1-\nu_k}+\cdots+2^{\nu_{k-1}-\nu_k})+o(1).$$

Repeating this process we obtain that

$$f(N) = \nu_1 f(2)-kf(2)+o(1)k \qquad (N\to\infty). \tag{3.4}$$

Since $2^{\nu_1}\leqq N<2^{\nu_1+1}$, we have $\dfrac{\nu_1\log 2}{\log N}\to 1$. Consequently, from (3. 4),

$$\frac{f(N)}{\log N} = \frac{f(2)}{\log 2}-f(2)\log 2\cdot\frac{\alpha(N)}{\log N}+o(1). \tag{3.5}$$

Now we prove that $f(2)=0$. For this let $N_l = 2+2^3+\dots+2^{2l+1}$. Then

$3N_l = 2+2^2+\ldots+2^{2l+2}$. Hence we obtain that $\alpha(3N_l)=2\alpha(N_l)$, $\alpha(N_l) = = (1+o(1))\dfrac{\log N_l}{2\log 2}$. By (3. 5) we have

$$f(3) = f(3N_l)-f(N_l) = -f(2)\log 2[\alpha(3N_l)-\alpha(N_l)]+o(\log N_l) =$$

$$= -f(2)\log 2\cdot\alpha(N_l)+o(\log N_l) = -\frac{f(2)}{2}(1+o(1))\log N_l.$$

Hence it follows immediately that $f(2)=0$.

Thus from (3. 5),

$$\lim_{N\to\infty}\frac{f(N)}{\log N} = 0. \tag{3. 6}$$

Using (3. 6) and the total additivity of $f(n)$ we have

$$\frac{f(N)}{\log N} = \lim_{k\to\infty}\frac{f(N^k)}{\log N^k} = 0,$$

and hence $f(N)=0$. This completes the proof of Theorem 2.

Remarks.

1) I am unable to prove Theorem 2 for restrictedly additive functions $f(n)$.

2) Similarly, I cannot decide whether from $g(2n+1)-f(n)\to C$ it follows or not that $f(n)$ and $g(n)$ are constant multiples of $\log n$.

3) It would be interesting to give all the solutions of the relation

$$f(An+B)-f(an+b)\to C \qquad (n\to\infty)$$

in additive functions $f(n)$, for arbitrary integers A, B, a, b.

References

[1] P. Erdős, On the distribution of additive functions, *Ann. of Math.*, **47** (1946), 1—20.
[2] A. S. Besicovitch, On additive functions of a positive integer, *Studies in mathematical analysis and related topics, Essays in honor of G. Pólya* (Stanford, 1962), 38—41.
[3] I. Kátai, A remark on additive arithmetical functions, *Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Math.*, **10** (1967), 81—83.
[4] A. Máté, A new proof of a theorem of P. Erdős, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8** (1967), 139—142.
[5] P. Erdős, On the distribution function of additive arithmetical functions, *Rend. Sem. Math. Fis., Milano*, **27** (1958), 3—7.
[6] I. Kátai, Characterization of an additive function by its local behaviour (not yet published).
[7] I. Kátai, A remark on number-theoretical functions, *Acta Arithm.* (in print).

(Received July 16, 1968)

On the sum $\sum d_4(n)$

By P. ERDŐS and I. KÁTAI in Budapest

1. Introduction

Let $d(n)$ denote the number of divisors of n, and $d_k(n)$ be the k-fold iterate of $d(n)$, i.e. $d_1(n)=d(n)$ and $d_k(n)=d(d_{k-1}(n))$ for $k\geqq 2$. Let

$$D_k(x) = \sum_{n\leqq x} d_k(n). \tag{1.1}$$

BELLMAN and SHAPIRO [1] conjectured that $D_k(x) = (1+o(1))\, c_k\, x \log_k x$ for all $k\geqq 1$, where $\log_k$ denotes the k-fold iterated logarithm.

This conjecture was proved for $k=2$ and 3 by KÁTAI [2], [3]. The aim of this paper is to prove it for $k=4$. The cases $k>4$ seem to be essentially more difficult.

Theorem 1. *We have*

$$D_4(x) = (1+o(1))c\, x \log_4 x$$

as $x\to\infty$, *where* c *is a positive constant.*

2. Notations and decomposition of the sum $D_4(x)$

The letters $p, p_1, \ldots, q, q_1, \ldots$ stand for prime numbers. Let $\omega(n)$ denote the number of the different, and $\Omega(n)$ the number of all prime factors of n, i.e. for $n=p_1^{\alpha_1}\ldots p_r^{\alpha_r}$ let $\omega(n)=r$ and $\Omega(n) = \alpha_1+\ldots+\alpha_r$. Let $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$ and let $\mu(n)$ denote the Moebius function. ($|\mu(n)| = 1$ or 0 according as n is square-free or not.) Let $\sigma_a(n)=\sum_{d|n} d^a$.

The letters $c, c_1 \ldots$ denote suitable positive constants, and $\varepsilon, \varepsilon_1 \ldots$ are arbitrary small positive constants not necessarily the same in every place.

We use the symbol $\ll$ in VINOGRADOV's sense.

For the sake of brevity denote $x_1=\log x$, $x_{i+1}=\log x_i$, $y_1=\log y$, $y_{i+1}=\log y_i$ $(i\geqq 1)$ and set

$$a_j(x) = \frac{(\log\log x)^{j-1}}{(j-1)!} \qquad (j=1,2,\cdots). \tag{2.1}$$

Denote by $\mathscr{K}$ the set of integers all whose prime factors occur with an exponent greater than 1. Clearly every integer can be uniquely written in the form

$$n = Km \quad \text{with} \quad (K, m) = 1, \quad K \in \mathscr{K}, \quad m \quad \text{square-free.} \tag{2. 2}$$

K will denote the quadratic part, m the square-free part of n. $\mathscr{A}_K$ is the set of integers whose quadratic part is K.

For $K \in \mathscr{K}$ let the numbers k, k_1, k_2, α be defined as follows:

$$k = d(K), \quad k = 2^\alpha k_1, \quad k_1 \quad \text{odd}, \quad k_2 = d(k_1). \tag{2. 3}$$

Then for an n in (2. 2) we have

$$d_2(n) = (\alpha + 1 + \omega(m))k_2. \tag{2. 4}$$

Set

$$\Sigma_K = \sum_{\substack{n \leqq x \\ n \in \mathscr{A}_K}} d_4(n). \tag{2. 5}$$

Then

$$D_4(x) = \sum_{K \in \mathscr{K}} \Sigma_K. \tag{2. 6}$$

Furthermore

$$\Sigma_K = \sum_{r=1}^{\infty} \Sigma_K^r, \tag{2. 7}$$

where in $\sum_K^r$ we sum over those n for which $\omega(m) = r$ (see (2. 2)). Let further

$$Z(y, K, r) = \sum_{\substack{(n, K) = 1 \\ \omega(n) = r \\ n \leqq y}} |\mu(n)|; \quad Z(y, K) = \sum_{\substack{n \leqq y \\ (n, K) = 1}} |\mu(n)|. \tag{2. 8)-(2. 9}$$

So by (2. 4) we have

$$\Sigma_K^r = d_2\big(k_2(\alpha + 1 + r)\big) Z\left(\frac{x}{K}, K, r\right). \tag{2. 10}$$

For a general natural number n let $\mathscr{B}_n$ denote the set of those positive integers all prime factors of which occur in n. Let further

$$\tau(n) = \prod_{p \mid n} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1} = \sum_{v \in \mathscr{B}_n} \frac{\lambda(v)}{v}. \tag{2. 11}$$

Let $\pi_r(x)$ be the number of those integers not exceeding x which contain exactly r prime factors.

3. Lemmas

Lemma 1. *For all $r \geqq 1$ we have*

$$\pi_r(x) < c_1 \frac{x(x_2+c_2)^{r-1}}{x_1(r-1)!}. \tag{3.1}$$

This is a known theorem of HARDY and RAMANUJAN [4].
Hence we easily deduce the well-known

Lemma 2. *For all constant $\delta > 0$ the inequalities*

$$\sum_{\substack{n \leqq Y \\ \Omega(n) < (1-\delta)\log_2 Y}} 1 \ll Y(\log Y)^{-\gamma_\delta}, \qquad \sum_{\substack{n \leqq Y \\ \Omega(n) > (1+\delta)\log_2 Y}} 1 \ll Y(\log Y)^{-\gamma_\delta} \tag{3.2)-(3.3}$$

hold with a suitable positive constant γ_δ. Further we have $\gamma_9 = 2$ in (3. 3).

Lemma 3. *Let $h(x)$ denote an increasing function of x, tending to infinity with x. Then*

$$\frac{x}{x_1} \sum_{|j-x_2| \leqq h(x)\sqrt{x_2}} a_j(x) = (1+o(1))x, \tag{3.4}$$

and consequently

$$\sum_{j \leqq x_2 - h(x)\sqrt{x_2}} a_j(x) = o(x_1), \qquad \sum_{j \geqq x_2 + h(x)\sqrt{x_2}} a_j(x) = o(x_1). \tag{3.5}$$

Lemma 3 is well known and can be proved by a simple computation.

Lemma 4. *Let $\beta < 1$ be an arbitrary positive constant, $Y_1 \geqq Y_2 \geqq Y_1^\beta$. Then*

$$\sum_{Y_1 \leqq n \leqq Y_1 + Y_2} \{\omega(n) - \log_2 Y_1\}^2 \ll Y_2 \log_2 Y_1. \tag{3.6}$$

This lemma can be proved by the method of TURÁN (see [5]).
Let

$$D_h(x, t) = \sum_{\substack{x < mn^2 \leqq x+h \\ n > t}} \sum 1. \tag{3.7}$$

Lemma 5. *For $0 < t \leqq x^{1/3}$ and $0 < h \leqq x^{2/3}$ we have*

$$D_h(x, t) \ll x^{\vartheta_1} + ht^{-1} \quad \text{with} \quad \vartheta_1 = 0{,}23. \tag{3.8}$$

Lemma 6. *We have*

$$Z(x, 1) = \frac{6}{\pi^2} x + O(x^{1/2}). \tag{3.9}$$

Furthermore, for $0 \leqq h \leqq x^{2/3}$,

$$Z(x+h, 1) - Z(x, 1) = \frac{6}{\pi^2} x + O(h^{1/2}) + O(x^{\vartheta_1}) \tag{3.10}$$

holds.

For the proof of (3. 8) and (3. 10) see RICHERT [6]. (3. 9) is well known.

Let $I(y, c)$ denote the interval $[y_2 - c\sqrt{y_2}, y_2 + c\sqrt{y_2}]$. Let further A be an arbitrary but fixed constant and

$$yy_1^{-A} \leqq y^* \leqq y. \tag{3.11}$$

Lemma 7. *For a suitable increasing function $g(y)$ with $\lim_{y\to\infty} g(y) = \infty$ we have*

$$Z(y^*, 1, r) = \frac{6}{\pi^2}(1+o(1))\frac{y}{y_1}a_r(y) \quad (y\to\infty) \tag{3.12}$$

uniformly in $I(y, 4g(y))$.

This is a slightly modified form of a result of P. ERDŐS [7].

4. Further lemmas

Lemma 8. *Let $b_K \ll K^\varepsilon$. Then we have*

$$\sum_{\substack{K>u\\ K\in\mathcal{K}}} \frac{b_K}{K} \ll u^{-1/3} \quad (u\to\infty). \tag{4.1}$$

Proof. This is an immediate consequence of the simple and known fact that

$$\sum_{\substack{K\leqq x\\ K\in\mathcal{K}}} 1 \ll x^{1/2+\varepsilon}.$$

Lemma 9. *For fixed $\beta > 0$ we have*

$$\sum_{v\in\mathcal{B}_n} v^{-\beta} \ll d(n), \tag{4.2}$$

furthermore

$$\sum_{\substack{v\in\mathcal{B}_n\\ v>u}} v^{-\beta} \ll d(n)u^{-\gamma} \tag{4.3}$$

when $\gamma < \beta$ and γ is constant.

Proof. Since

$$\sum_{v\in\mathcal{B}_n} v^{-\beta} = \prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p^\beta}\right)^{-1} = \prod_{p^\beta<2}\cdot\prod_{p^\beta\geqq 2} \leqq C(\beta)\,d(n)$$

which proves (4. 2). Now (4. 2) implies (4. 3) since $v^{-\beta} \leqq u^{-\gamma}v^{-\beta+\gamma}$ for $v \geqq u$.

Lemma 10. *We have*

$$Z(y, K, r) = \frac{6}{\pi^2}(1+o(1))\tau(K)\frac{y}{y_1}a_r(y) \quad (y\to\infty) \tag{4.4}$$

uniformly for $K \leqq y_2^4$, $r\in I(y, 2g(y))$. [$g(y)$ as in Lemma 7.]

Proof. The identity

$$Z(y, K, r) = \sum_{v \in \mathcal{B}_K} \lambda(v) Z\left(\frac{y}{v}, 1, r-\Omega(v)\right) \tag{4.5}$$

can be proved elementarily or by using the uniqueness of Dirichlet series expansions.

Suppose that $K \leqq y_2^4$, $r \in I(y, 2g(y))$. Let $\Delta = y_2^6$. For $v < \Delta$ we have $\Omega(v) <$ $> c \log 2v < cy_3 \leqq g(y) y_2^{1/2}$. Hence $r - \Omega(v) \in I(y, 2g(y))$, if y is sufficiently large. From (4. 5) we obtain

$$Z(y, K, r) = \sum_{\substack{v \in \mathcal{B}_K \\ v \leqq \Delta}} \lambda(v) Z\left(\frac{y}{v}, 1, r-\Omega(v)\right) + \tag{4.6}$$

$$+ O\left(\sum_{\substack{v > \Delta \\ v \in \mathcal{B}_K}} Z\left(\frac{y}{v}, 1, r-\Omega(v)\right)\right) = \Sigma_1 + O(\Sigma_2).$$

Using Lemma 7 we deduce

$$\Sigma_1 = \frac{6}{\pi^2}(1+o(1)) \frac{y}{y_1} \sum_{\substack{v \in \mathcal{B}_K \\ v \leqq \Delta}} \frac{\lambda(v)}{v} a_{r-\Omega(v)}(y). \tag{4.7}$$

Since $a_{r-\Omega(v)}(y) = (1+o(1)) a_r(y)$ in $r \in I(y, 2g(y))$ we have

$$\Sigma_1 = \frac{6}{\pi^2}(1+o(1)) \tau(K) \frac{y a_r(y)}{y_1} + o(1) a_r(y) \frac{y}{y_1} \sum_{v \in \mathcal{B}_K} 1_v + O\left(\frac{y}{y_1} a_r(y) \sum_{\substack{v \geqq \Delta \\ v \in \mathcal{B}_K}} \frac{1}{v}\right).$$

Hence by $\sum_{v \in \mathcal{B}_K} v^{-1} \ll \tau(K)$ and (4. 3) we obtain

$$\Sigma_1 = \frac{6}{\pi^2}(1+o(1)) \tau(K) \frac{y a_r(y)}{y_1}.$$

Now we estimate the sum Σ_2. We have by (4. 2) that

$$\Sigma_2 \leqq y \sum_{v > \Delta} v^{-1} \ll y d(K) \Delta^{-1/2} \ll y y_2^{-2}$$

and so $\Sigma_2 = o(\Sigma_1)$. Hence (4. 4) follows.

Lemma 11. *We have*

$$Z(y, K) = \frac{6}{\pi^2} \tau(K) y + O(d(K) y^{1/2}). \tag{4.8}$$

Proof. Summing in (4. 5) for $1 \leqq r < \infty$ we deduce

$$Z(y, K) = \sum_{\substack{v \leqq y \\ v \in \mathcal{B}_K}} \lambda(v) Z\left(\frac{y}{v}, 1\right). \tag{4.9}$$

Hence by (3. 9) we have

$$Z(y, K) = \frac{6}{\pi^2}\tau(K)y + O\Bigg(y \sum_{\substack{v \geqq y \\ v \in \mathcal{B}_K}} \frac{1}{v}\Bigg) + O\Bigg(y^{1/2} \sum_{v \in \mathcal{B}_K} \frac{1}{\sqrt{v}}\Bigg).$$

By Lemma 9 we deduce (4. 8).

Lemma 12. *Let* $z_1^{2/3} \geqq z_2 \geqq z_1^{1/4}$, $L = O(z_1^{1/4})$. *Then we have*

$$Z(z_1+z_2, L) - Z(z_1, L) = \frac{6}{\pi^2}\tau(L)z_2 + O\big(d(L)(z_1^{1/4}+z_2^{1/2})\big). \tag{4.10}$$

Proof. Using the identity (4. 9) we have

$$\Delta \overset{\text{def}}{=} Z(z_1+z_2, L) - Z(z_1, L) = \sum_{\substack{v \in \mathcal{B}_L \\ v < z_1+z_2}} \lambda(v)\Bigg\{Z\Bigg(\frac{z_1+z_2}{v}, 1\Bigg) - Z\Bigg(\frac{z_1}{v}, 1\Bigg)\Bigg\}.$$

Hence by (3. 10) we obtain

$$\Delta = \frac{6}{\pi^2}\tau(L)z_2 + O\Bigg(z_2 \sum_{\substack{v > z_2 \\ v \in \mathcal{B}_L}} \frac{1}{v}\Bigg) + O\big(z_1^{1/4} \sum_{v \in \mathcal{B}_L} v^{-1}\big) +$$

$$+ O\big(\sqrt{z_2} \sum_{v \in \mathcal{B}_L} v^{-1/2}\big) + O\big(\sum_{\substack{z_2 < v < z_1+z_2 \\ v \in \mathcal{B}_L}} 1\big).$$

For the last sum we have

$$\sum_{\substack{z_2 < v < z_1+z_2 \\ v \in \mathcal{B}_L}} 1 < (2z_1)^{0,1} \sum_{v \in \mathcal{B}_L} v^{-0,1} \ll d(L) z_1^{0,1}.$$

Using Lemma 9 for the other remainder terms we have (4. 10).

5. For a general integer S let

$$T_S(Y_1, Y_1+Y_2) = \sum_{Y_1 < r \leqq Y_1+Y_2} d_2(Sr). \tag{5.1}$$

Every integer r can be represented in the form

$$r = R_1 R_2 \varrho, \quad R_1 \in \mathcal{B}_S, (R_2\varrho, S) = 1, \quad R_2 \in \mathcal{K}, \quad |\mu(\varrho)| = 1 \tag{5.2}$$

and this representation is unique.

Let $L = R_1 R_2$ and D_L be the set of those r in (5. 2) for which $L = R_1 R_2$. Let

$$d(SL) = l = 2^\beta l_1, \quad \text{with } l_1 \text{ odd and } d(l_1) = l_2, \tag{5.3}$$

and let

$$\Lambda(S) = \sum_{R_1, R_2} \frac{l_2 \tau(SR_2)}{R_1 R_2}. \tag{5.4}$$

Lemma 13. *Let* $Y_1^{1/2} \geqq Y_2 \geqq Y_1^{1/3}$, $S \leqq Y_1^{0,01}$. *Then*

$$T_S(Y_1, Y_1+Y_2) = \frac{6}{\pi^2} \Lambda(S) Y_2 \log\log Y_1 + O\big(Y_2 (\log_2 Y_1)^{1/2} S^{\varepsilon}\big). \tag{5.5}$$

Proof. Using the notations in (5. 3) we have for an r in (5. 2)

$$d_2(Sr) = \big(\omega(\varrho)+\beta+1\big) l_2 = \omega(r) l_2 + \big(\beta+1-\omega(L)\big) l_2. \tag{5.6}$$

Hence

$$T_S(Y_1, Y_1+Y_2) = \sum_{Y_1 < r \leqq Y_1+Y_2} \omega(r) l_2 + \sum_{Y_1 < r \leqq Y_1+Y_2} \big(\beta+1-\omega(L)\big) l_2 = \Sigma_1 + \Sigma_2. \tag{5.7}$$

Furthermore

$$\Sigma_1 = \log_2 Y_1 \sum_{Y_1 < r \leqq Y_1+Y_2} l_2 + O\Big(\sum_{Y_1 < r \leqq Y_1+Y_2} |\omega(r) - \log_2 Y_1| l_2\Big) = \tag{5.8}$$

$$= \log_2 Y_1 \Sigma_3 + O(\Sigma_4).$$

By the Cauchy inequality we have

$$\Sigma_4 \leqq \Big\{\sum_{Y_1 < r \leqq Y_1+Y_2} (\omega(r) - \log_2 Y_1)^2\Big\}^{1/2} \Big\{\sum_{Y_1 < r \leqq Y_1+Y_2} l_2^2\Big\}^{1/2} = \Sigma_5^{1/2} \Sigma_6^{1/2}. \tag{5.9}$$

By Lemma 4

$$\Sigma_5 \ll Y_2 \log_2 Y_1. \tag{5.10}$$

Using (5. 3) we obtain $\big(d(m) < m^{\varepsilon}\big)$

$$l_2^2 = O\big((SL)^{\varepsilon}\big) \quad \big(\beta+1-\omega(L)\big) l_2 = O\big((SL)^{\varepsilon}\big).$$

Consequently,

$$\Sigma_2 = O(S^{\varepsilon} \Sigma_7), \quad \Sigma_6 = O(S^{\varepsilon} \Sigma_7), \tag{5.11}$$

where

$$\Sigma_7 = \sum_{Y_1 < r \leqq Y_1+Y_2} L^{\varepsilon}. \tag{5.12}$$

We have

$$\Sigma_7 \ll \sum_{\substack{Y_1 < r = \varrho L \leqq Y_1+Y_2 \\ L \leqq Y_2}} L^{\varepsilon} + Y_1^{\varepsilon} \sum_{\substack{Y_1 < r = \varrho L \leqq Y_1+Y_2 \\ L > Y_2}} 1 = \Sigma_8 + Y_1^{\varepsilon} \Sigma_9. \tag{5.13}$$

Furthermore

$$\Sigma_8 \ll Y_2 \sum_{R_1 R_2 \leqq Y_2} (R_1 R_2)^{\varepsilon-1} \ll Y_2 \Big\{\sum_{R_1 \in \mathscr{B}_S} R_1^{\varepsilon-1}\Big\} \Big\{\sum_{R_2 \in \mathscr{K}} R_2^{\varepsilon-1}\Big\} \ll \tag{5.14}$$

$$\ll Y_2 \prod_{p|S} \left(1 - \frac{1}{p^{1-\varepsilon}}\right)^{-1} \ll d(S) Y_2 \ll Y_2 S^{\varepsilon}.$$

Now we estimate the sum Σ_9.

Let u^2 and v^2 denote the greatest square divisors of the numbers R_1 and R_2. Since $R_1 \in \mathscr{B}_S$, so $u^2 \geqq R_1/S \geqq R_1 Y_1^{-0,01} \geqq R_1 Y_2^{0,03}$ holds. Furthermore, since all prime factors of R_2 occur with an exponent greater than 1, we have $R_2 = v^2 l$

and l/v, i.e. $v \geqq R_2^{1/3}$. Hence the in $r\Sigma_9$ have the form $r=n^2m$, where $n \geqq R_1 R_2^{1/3} Y_2^{-0,03} \geqq$ $\geqq (R_1R_2)^{1/3} Y_2^{-0,03} \geqq Y_2^{0,3}$. Thus

$$\Sigma_9 \ll \sum_{\substack{Y_1 \leqq n^2 m \leqq Y_1+Y_2 \\ n \geqq Y_2^{0,3}}} 1.$$

Applying Lemma 5 we obtain

$$\Sigma_9 \ll Y_1^{1/4} + Y_2^{0,7} \ll Y_2^{3/4}. \tag{5.15}$$

Combining this with (5. 14) we deduce

$$T_S(Y_1, Y_1+Y_2) = \log_2 Y_1 \cdot \Sigma_3 + O\big(Y_2(\log_2 Y_1)^{1/2} S^\varepsilon\big). \tag{5.16}$$

Now we estimate the sum Σ_3. We have by (5. 15)

$$\Sigma_3 = \sum_{\substack{Y_1 \leqq r \leqq Y_1+Y_2 \\ L \leqq Y_2}} l_2 + O\Big(Y_1^\varepsilon \sum_{\substack{Y_1 < r \leqq Y_1+Y_2 \\ L > Y_2}} 1\Big) = \Sigma_{10} + O(Y_1^\varepsilon \Sigma_9) = \Sigma_{10} + O(Y_2^{0,8}). \tag{5.17}$$

Furthermore by (5. 2)

$$\Sigma_{10} = \sum_{L \leqq Y_2} l_2 \left\{ Z\left(\frac{Y_1+Y_2}{L}, SL\right) - Z\left(\frac{Y_1}{L}, SL\right)\right\} = \tag{5.18}$$

$$= \sum_{L \leqq Y_2^{0,01}} + \sum_{L > Y_2^{0,01}} = \Sigma_{11} + \Sigma_{12}.$$

For Σ_{12} we have

$$\Sigma_{12} \ll Y_2 \sum_{L \geqq Y_2^{0,01}} \frac{l_2}{L} \ll Y_2 \sum_{L \geqq Y_2^{0,01}} L^{-1+\varepsilon} \ll Y_2 \{\sum_{R_1} R_1^{-1+\varepsilon}\}\{\sum_{R_2 > Y_2^{0,005}} R_2^{-1+\varepsilon}\} + \tag{5.19}$$

$$+ Y_2 \{\sum_{R_1 > Y_2^{0,005}} R_1^{-1+\varepsilon}\}\{\sum_{R_2} R_2^{-1+\varepsilon}\} \ll Y_2^{1-0,0001}.$$

For Σ_{11} we use Lemma 12 and deduce

$$\Sigma_{12} = \frac{6}{\pi^2} Y_2 \sum_{L \leqq Y_2^{0,01}} \frac{l_2 \tau(LS)}{L} + O\left(Y_1^{1/4} \sum_{L \leqq Y_2^{0,01}} \frac{d(L) l_2}{L^{1/4}}\right) + \tag{5.20}$$

$$+ O\left(Y_2^{1/2} \sum_{L \leqq Y_2^{0,01}} \frac{d(L) l_2}{L^{1/2}}\right) = \frac{6}{\pi^2} Y_2 A(S) + O\left(\sum_{L \geqq Y_2^{0,01}} \frac{l_2 \tau(LS)}{L}\right) + O(Y_2^{3/4}).$$

Further, by elementary calculation,

$$\sum_{L \geqq Y_2^{0,01}} l_2 \frac{\tau(LS)}{L} \leqq \frac{\tau(S)}{(Y_2^{0.01})^{1/4}} Y_2^\varepsilon \sum_L \frac{\tau(L)}{L^{3/4}} \ll Y_2^{-0,001}. \tag{5.21}$$

Combining our inequalities (5. 17)—(5. 21), (5. 5) follows and hence the lemma is proved.

Putting $S=1$ in Lemma 13 we obtain by a simple calculation

$$D_2(x) = \sum_{n \leqq x} d_2(n) = cx \log_2 x + O\left(x\sqrt{\log_2 x}\right).$$

6. The proof of the theorem

First we prove that

$$\Sigma_1 \overset{\text{def}}{=} \sum_{\substack{K > x_2^3 \\ K \in \mathcal{K}}} \Sigma_K \ll x. \tag{6.1}$$

Indeed by (2. 3), (2. 4) we have

$$d_4(n) \leqq d_2(n) = (\alpha + 1 + \omega(m))k_2, \ \alpha \ll \log K.$$

Let $\Sigma_1 = \Sigma_2 + \Sigma_3$, with $\omega(m) \leqq 10x_2$ in Σ_2 and $\omega(m) > 10x_2$ in Σ_3. So by Lemma 8 we have

$$\Sigma_2 \ll x \sum_{\substack{K > x_2^3 \\ K \in \mathcal{K}}} \frac{(\log K + x_2)k_2}{K} \ll x.$$

Furthermore, using that $\omega(m) \ll x_1$, we have

$$\Sigma_3 \ll x_1 \sum_{\omega(n) \geqq 10x_2} k_2 \ll x_1 \Big\{\sum_{n \leqq x} k_2^2\Big\}^{1/2} \Big\{\sum_{\substack{\omega(n) \geqq 10x_2 \\ u \leqq x}} 1\Big\}^{1/2} \ll xx_1 \left\{\sum \frac{k_2^2}{K}\right\}^{1/2} x_1^{-1} \ll x,$$

by Lemma 8 and Lemma 2.

Suppose now that $K \leqq x_2^3$. Let

$$\Sigma_K^{(-)} = \sum_{r \leqq \frac{1}{2} x_2} \Sigma_K^r, \quad \Sigma_K^{(+)} = \sum_{r \geqq 2x_2} \Sigma_K^r, \tag{6.2)-(6.3}$$

$$\Sigma_K^{(0)} = \sum_{\frac{1}{2} x_2 < r < 2x_2} \Sigma_K^r. \tag{6.4}$$

We prove that

$$\Sigma^{(-)} = \sum_{\substack{K \leqq x_2^3 \\ K \in \mathcal{K}}} \Sigma_K^{(-)} = O(x), \tag{6.5}$$

and that

$$\Sigma^{(+)} = \sum_{\substack{K \leqq x_2^3 \\ K \in \mathcal{K}}} \Sigma_K^{(+)} = O(x). \tag{6.6}$$

Since $K \leqq x_2^3$ we have $\omega(K) \ll x_3$ and so in the sums $\Sigma_K^{(-)}$ $\omega(n) \ll \frac{3}{4} x_2$. Furthermore we have $d_4(n) \leqq G(\varepsilon) d^\varepsilon(n)$. So by the Hölder inequality

$$\Sigma^{(-)} \ll \sum_{\substack{n \leqq x \\ \omega(n) \leqq \frac{3}{4} x_2}} d^\varepsilon(n) \ll \Big\{\sum_{\omega(n) \leqq \frac{3}{4} x_2} 1\Big\}^{1-\varepsilon} \{\Sigma\, d(n)\}^\varepsilon \ll x \cdot x_1^{\varepsilon - \gamma_{1/4}(1-\varepsilon)} \ll x,$$

if ε is small enough (see (3. 2)). The proof of (6. 6) is very similar.

Finally we prove that

$$\Sigma^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{K<x_2^3} \Sigma_K^{(0)} = c\big(1+o(1)\big)\cdot xx_4. \tag{6.7}$$

Since $D_4(x) = \Sigma^{(0)}+\Sigma^{(+)}+\Sigma^{(-)}+\Sigma_1$, the theorem will immediately follow. By (2. 10) we have

$$\Sigma_K^{(0)} = \sum_{\frac{x_2}{2}<r<2x_2} d_2(k_2(\alpha+1+r))Z\left(\frac{x}{K}, K, r\right) = \Sigma_K^{(1)}+\Sigma_K^{(2)}, \tag{6.8}$$

where in $\Sigma_K^{(1)}$ $|r-x_2|\leqq g(x)\sqrt{x_2}$ and in $\Sigma_K^{(2)}$ $|r-x_2|\geqq g(x)\sqrt{x_2}$ holds. Here $g(x)$ is a sequence which tends to infinity with α monotonically and for which the Lemma 10 holds.

Let $A=[x_2^{1/3}]$, $A_x = x_2-g(x)\sqrt{x_2}$, $B_x = x_2+g(x)\sqrt{x_2}$ and split the interval into consecutive subintervals with lengths A. Let

$$G_j=[A_x+(j-1)A,\ A_x+jA],\quad j=1,2,\cdots,T;\quad T=\left[\frac{2g(x)\sqrt{x_2}}{A}\right]+1.$$

Thus we have by (4. 4) that

$$\Sigma_K^{(1)} = \sum_{j=1}^{T} \Sigma_K^{(1,j)} + O(\Sigma_K^{(1,T)}), \tag{6.9}$$

where

$$\Sigma_K^{(1,j)} = \sum_{r\in G_j} d_2(k_2(\alpha+1+r))Z\left(\frac{x}{K}, K, r\right).$$

By Lemma 10 we have

$$\Sigma_K^{(1,j)} = \frac{6}{\pi^2}\big(1+o(1)\big)\frac{\tau(K)}{K}\frac{x}{\log x/K}\sum_{r\in G_j} d_2(k_2(\alpha+1+r))a_r\left(\frac{x}{K}\right).$$

Taking into account that $a_r(x/K) = (1+o(1))a_r(x)$ for $K\leqq x_2^4$, $r\in I(x, 2g(x))$ and that $a_{r_1}(x)/a_{r_2}(x) = 1+o(1)$ for $|r_1-r_2|\leqq A$, $r_1, r_2\in I(x, 2g(x))$ we have

$$\Sigma_K^{(1,j)} =$$

$$= \frac{6}{\pi^2}\big(1+o(1)\big)\frac{\tau(K)}{K}\frac{x}{x_1}T_{k_2}(A_x+(j-1)A+\alpha+1,\ A_x+jA+\alpha+1)\frac{1}{A}\sum_{r\in G_j} a_r(x).$$

Observing that the conditions of Lemma 13 are satisfied, we deduce

$$\Sigma_K^{(1,j)} = \left(\frac{6}{\pi^2}\right)^2\big(1+o(1)\big)\frac{\tau(K)}{K}\Lambda(k_2)\frac{x}{x_1}x_4\sum_{r\in G_j} a_r(x)+O\left(\frac{\tau(K)}{K}k_2^{\varepsilon}\frac{x}{x_1}x_4^{1/2}\sum_{r\in C_j} a_r(x)\right).$$

Hence by (6. 9) using (3. 4) we have

$$\Sigma_K^{(1)} = \big(1+o(1)\big)\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^2\frac{\tau(K)}{K}\Lambda(k_2)xx_4+O\left(xx_4^{1/2}\frac{\tau(K)}{K}k_2^{\varepsilon}\right). \tag{6.10}$$

Now we consider the sum $\Sigma_K^{(2)}$. From (3. 1) we easily deduce

$$Z\left(\frac{x}{K}, K, r\right) < c_1 \frac{x}{Kx_1} \frac{(x_2+c_2)^{r-1}}{(r-1)!} < c \frac{x}{Kx_1} a_r(x)$$

for $r<2x_2$ and $K<x_2^3$. Hence we have

$$\Sigma_K^{(2)} \ll \frac{x}{Kx_1}\Big\{ \sum_{\frac{x_2}{2}\leqq r\leqq A_x} d_2\big(k_2(\alpha+1+r)\big)a_r(x) + \tag{6. 11}$$

$$+ \sum_{B_x\leqq r\leqq 2x_2} d_2\big(k_2(\alpha+1+r)\big)a_r(x)\Big\}.$$

Let Σ_4 and Σ_5 denote the first and the second sum in the right hand side of (6. 11). Taking into account that $a_r(x)$ is monotonically increasing in Σ_4 and decreasing in Σ_5 in r, we have

$$\Sigma_4 \leqq \sum_{j=0}^{\left[\frac{x_2}{2A}\right]} a_{A_x-jA}(x) \sum_{A_x-jA\leqq r\leqq A_x+(j+1)A} d_2\big(k_2(\alpha+1+r)\big)$$

and similarly

$$\Sigma_5 \leqq \sum_{j=1}^{\left[\frac{x_2}{2A}\right]} a_{B_x+jA}(x) \sum_{B_x+(j-1)A\leqq r\leqq B_x+jA} d_2\big(k_2(\alpha+1+r)\big).$$

Hence by Lemma 13 we have

$$\Sigma_4 \ll \{x_4 A(k_2) + O(x_4^{1/2}k_2^{\varepsilon})\} A \sum_{j=0}^{\left[\frac{x_2}{2A}\right]} a_{A_x-jA}(x).$$

Since

$$A \sum_{j=0}^{\left[\frac{x_2}{2A}\right]} a_{A_x-jA}(x) \leqq \sum_{r\leqq A_x+A} a_r(x) = o(x_1),$$

we have

$$\Sigma_4 = o(x_1)\{x_4 A(k_2) + x_4^{1/2}k_2^{1/2}\}. \tag{6. 12}$$

Using similar arguments we can deduce for Σ_5 the same inequality.

Hence by (6. 11) and (6. 10)

$$\Sigma_K^{(2)} = o(1)\Sigma_K^{(1)} \quad \text{i.e.} \quad \Sigma_K^{(0)} = \big(1+o(1)\big)\Sigma_K^{(1)}.$$

Summing over K we have

$$\Sigma^{(0)} = \big(1+o(1)\big)\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^2 xx_4 \sum_{K\leqq x_2^3} \frac{\tau(K)}{K} A(k_2) + O\left(xx_4^{1/2} \sum_{K\leqq x_2^3} \frac{\tau(K)k_2^{\varepsilon}}{K}\right).$$

Observing that the sums are convergent we deduce (6. 7).

This completes the proof of our theorem.

References

[1] R. Bellman and H. N. Shapiro, On a problem in additive number theory, *Ann. of Math.*, **49** (1948), 333—340.

[2] I. Kátai, On the sum $\Sigma\, dd(f(n))$, *Acta Sci. Math.*, **29** (1968), 199—205.

[3] I. Kátai, On the iteration of the divisor function, *Publ. Math. Debrecen* (in print).

[4] G. H. Hardy and S. Ramanujan, The normal number of prime factors of a number n, *Quart. J. Pure and Appl. Math.*, **48** (1920), 76—92.

[5] P. Turán, Über einige Verallgemeinerungen eines Satzes von Hardy und Ramanujan, *J. London Math. Soc.*, **11** (1936), 125—133.

[6] H. E. Richert, On the difference between consecutive square free numbers, *J. London Math. Soc.*, **29** (1954), 16—20.

[7] P. Erdős, On the integers having k prime factors, *Ann. of Math.*, **49** (1948), 53—66.

(Received July 16, 1968)

Bibliographie

Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. III. Differential Geometry, VII+200 pages, Providence, R. I., American Mathematical Society, 1961.

This volume, edited by CARL. B. ALLENDOERFER, contains the material of the Symposium on Differential Geometry held at the University of Arizona in Tucson, Arizona, February 18—19, 1960. Its contents represent a wide variety of topics in global differential geometry. The papers in the volume are as follows: RAUL BOTT: A report on the unitary group, M. F. ATIYAH and F. HIRZEBRUCH: Vector bundles and homogeneous spaces, JOHN MILNOR: A procedure for killing homotopy groups of differentiable manifolds, D. C. SPENCER: Some remarks on homological analysis and structures, ALBERT NIJENHUIS: Vector form methods and deformations of complex structures, A. G. WALKER: Almost-product structures, ELDON DYER and R. K. LASHOF: Homology of principal bundles, JAMES EELLS, JR.: Alexander—Pontrjagin duality in function spaces, RICHARD S. PALAIS: The cohomology of Lie rings, LUIS AUSLANDER: On the theory of solvmanifolds and generalization with applications to differential geometry, WILLIAM M. BOOTHBY: Homogeneous complex contact manifolds, EUGENIO CALABI: On compact Riemannian manifolds with constant curvature, I. L. NIRENBERG: Elementary remarks on surfaces with curvature of fixed sign, SHOSHICHI KOBAYASHI: Canonical forms on frame boundles of higher order contact, HANS SAMELSON: On immersions of manifolds.

Each of the papers in this volume reports on significant new developments in research.

J. Szenthe (Szeged)

R. Engelking, Outline of general topology, 388 pages, North-Holland Publishing Company, Amsterdam—PWN Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1968.

This book is an excellent introduction to modern concepts and results of general topology intended for readers familiar with elementary analysis and set theory, e. g. for graduate students or specialists in any branch of mathematics.

The text consists of an Introduction and eight chapters. The Introduction enumerates basic notions and results of set theory needed in the following, in general without proofs. Chapter 1 introduces topological spaces, various methods of generation of a topology, important kinds of sets in a topological space, continuity, separation axioms, and convergence of nets and filters. Chapter 2 deals with operations on topological spaces such as construction of subspaces, sums, products, quotients, inverse limits and mapping spaces. Chapter 3 is devoted to compact spaces, compactifications of Tychonoff spaces, locally compact spaces, Lindelöf spaces, completeness in the sense of Čech, countably compact spaces, pseudo-compact spaces, and real-compact spaces. Chapter 4 summarizes basic properties of metrizable spaces including the metrization theorems of Nagata—Smirnov and Bing. Chapter 5 gives a survey on paracompact, countably paracompact, weakly paracompact (=metacompact), and strongly paracompact spaces. The subject of Chapter 6 is a short outline of elementary properties of connected spaces and the analysis of various kinds of disconnectedness. The latter subject serves as an introduction to Chapter 7, dealing with dimension theory; here the dimensions ind, Ind, dim are introduced for regular, normal, and Tychonoff spaces respectively, their fundamental properties are presented, and the equalities dim X=Ind X for metrizable X, ind X=dim X=Ind X for separable metrizable X, ind X=dim X=Ind $X=n$ for $X=R^n$ are proved (the latter is based on Brouwer's fix point theorem, the proof of which is added in an Appendix). Finally Chapter 8 contains basic concepts and results of the theory of uniform and proximity spaces.

In the formulation of definitions and the choice of terminology, simplicity is preferred to most possible generality. E. g. mapping denotes a continuous mapping, regular spaces have to be T_1, compact spaces are necessarily T_2, Lindelöf spaces are regular by definition, etc. The proofs are extremely clear, the connections are pointed out perfectly. All concepts are illustrated by well-chosen examples and counter-examples exposed in a sufficiently detailed manner (and not left to the reader like in many monographs). Each section is followed by exercises and each chapter by a rich collection of problems. Among them one finds quite a lot of important theorems belonging to the classical results of the theory. Extraordinarily valuable are the historical remarks and bibliographic notes standing at the end of each chapter. A Bibliography of 14 pages and a very practical Subject Index are useful supplements of this outstanding work.

Ákos Császár (Budapest)

A. Zygmund, Trigonometric series, vol. I and II, XIV+383 pages and VII+364 pages, reprint of the second edition, bound in one volume, Cambridge University Press, New York, 1968.

The first edition of this book was published in Warsaw in 1935. It presented a concise account of the main results known by then, and before long it became the "Bible" of the analysts interested in trigonometric series, Fourier series and related branches of pure mathematics. Indeed, the first edition was three times reprinted in New York between 1940 and 1955; nevertheless, one volume of 330 pages considerably limited the amount of the discussed material.

The theory of trigonometric series has progressed a good deal since 1935, and Professor Zygmund took full account of this great development. The second edition of his monograph, published in Cambridge in 1959, treats exhaustively this field so vastly enriched by recent investigations. It consists of two volumes, and totals over 750 pages, introducing many topics that had not been considered in the first edition. In particular, Volume I contains, essentially, the completely rewritten material of the original work. Volume II provides much material previously not treated in textbooks.

The second edition is, as the first one, devoted to the classical theory of trigonometric series. Recent extensions of the theory to abstract fields such as the theory of groups, algebra, theory of numbers, etc. has been deliberately left aside.

Despite of the intricacy and the vast dimensions of the material discussed, Professor Zygmund's complete mastery of his subject makes it eminently readable.

The book under review is a reprint of the second edition, bound in one volume, correcting a number of errors and including a more comprehensive index.

Finally, may the reviewer venture to express his particular desire to take some time the third edition of this work in his hands, complemented with an account of the research done in the field in the sixties, in particular with the results of L. Carleson and R. A. Hunt. Conceivably, these discoveries might considerably influence the development in years to come, although the present-day methods of the cited authors are very complicated and tortuous. The reviewer is hopeful that these questions in Professor Zygmund's presentation will prove to be more accessible to anyone interested in this field.

The above desire of the reviewer naturally does not concern the value of this almost perfect work at all. Every analyst should be familiar with this rich and beautiful book.

Ferenc Móricz (Szeged

D. G. Northcott, Lessons on rings, modules and multiplicities, XIV+414 pages, Cambridge, University Press, 1968.

This comprehensive book is a clear and modern introduction to the theory of rings and modules. It contains a large material in these fields including numerous results developed only in the past ten to fifteen years.

The book consists of nine chapters. Chapter 1 has an introductory character. It contains among other things the concepts of homomorphism and isomorphism, submodule, factor module, composition series, maximal and minimal conditions, direct sum, ring of endomorphisms, simple and semi-simple ring, exact sequence and free module. Here are presented also the isomorphism theorems for left R-modules. Chapter 2 deals with the prime ideals and integral domains, minimal prime ideals, integral extensions, primary and homogeneous primary decompositions, and graded rings and modules. Chapter 3 contains investigations on rings and modules of fractions. The subject of Chapter 4 and 5 is the study of the Noetherian and Artin rings and of the semi-regular rings, especially the semiregular polynomial rings. In Chapter 6 the Hilbert ring of polynomials with coefficients in a field is studied. Chapter 7 is devoted to the development of the theory of algebraic multiplicities on Noetherian left R-modules. The limit formulae of Lech and Samuel and a few investigations on Hilbert functions are also presented here. The aim of Chapter 8 is to show how the properties of the Koszul complex throw light on certain aspects of the multiplicity theory and the theory of grade. Finally, Chapter 9 deals with the study of filtered rings and modules.

There are a lot of good exercises at the end of each chapter, helping the understanding of the material.

I. Peák (Szeged)

Hans Grauert—Wolfgang Fischer, Differential- und Integralrechnung. II (Heidelberger Taschenbücher, Bd. 36), XII+216 Seiten, Berlin—Heidelberg—New York, Springer-Verlag, 1968.

Hans Grauert—Ingo Lieb, Differential- und Integralrechnung. III (Heidelberger Taschenbücher, Bd. 43), X+177 Seiten, Berlin—New York, Springer-Verlag, 1968.

Band I ist im Jahre 1967 veröffentlicht und wurde schon vorherig (diese *Acta,* **19** (1968), 215) besprochen. Der vorliegende Band II betrachtet die Differentialrechnung für reelle Funktionen von mehreren Veränderlichen und die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Band III beschäftigt sich mit der Integralrechnung für reelle Funktionen von mehreren Veränderlichen einschließlich der Theorie der Kurven- und Flächenintegralen. Als Vorkenntnis ist nur der Stoff von Band I und Bekanntschaft mit der linearen Algebra vorausgesetzt. Die Behandlungsweise dieser Bände ist — wie im Band I — sehr klar und exakt; die moderne Terminologie der Analysis ist angewendet. Als ein weiterer großer Vorteil dieser Bände soll es erwähnt werden, daß sie trotz dem verhältnismäßig kleinen Umfang einen großen Stoff enthalten. Neben den gewöhnlichen, grundlegenden Fragen werden z. B. die rektifizierbaren Kurven, die kontra- und kovarianten Tangentialvektoren, sowie Pfaffsche Formen auf exakte Weise definiert und betrachtet; neben den grundlegenden elementaren Tatsachen werden die wichtigsten Stabilitätsaussagen und Sätze über den Definitionsbereich und die Differenzierbarkeit der allgemeinen Lösung, die Zusammenhang zwischen Differentialgleichungen und Pfaffschen Formen, die Theorie der linearen Systeme mit den benötigten Tatsachen bis zur Jordanschen Normalform einer Matrix, die für den Physiker wichtigen Differentialgleichungen mit Randwerten behandelt; die Betrachtung der Integrationstheorie enthält das Lebesguesche und das Lebesgue-Stieltjessche Integralbegriff und die Integration nach dem Diracschen Maß; die Absolutstetigkeit der Integralfunktion wird in Band III bewiesen; als Anwendung der Integrationstheorie werden die Maxwellschen Gleichungen betrachtet.

Die Behandlungsweise hat viele eigentümliche Züge. Besonders merkwürdig ist die Weise, auf die der n-dimensionale Integralbegriff eingeführt ist. Dadurch gelingt es die Ergebnisse leichter auf allgemeinere Fälle, z. B. auf Funktionen mit Werten in einem topologischen Vektorraum zu übertragen, und die Behandlung stellenweise zu vereinfachen. Diese Behandlungsweise ist aber weniger anschaulich. Im Text gibt es keine Beispiele und Übungsaufgaben. Diese Bände sind in erster Reihe für diejenigen Leser nützlich, die die Elemente dieses Problemkreises schon kennen; diese Leser bekommen aus diesen Büchern eine moderne und exakte Übersicht der Differential- und Integralrechnung.

K. Tandori (Szeged)

Géza Freud, Orthogonale Polynome, 294 Seiten, Budapest, Akadémiai Kiadó; Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften; Basel, Birkhäuser Verlag, 1969.

Das Buch gibt eine gute, zeitgemäße Übersicht der allgemeinen Theorie der Orthogonalpolynome. Nach der Erscheinung der klassischen Monographie von G. Szegő ist dies das erste Buch, das diesen Problemkreis genügend umfassend behandelt, und auch die neueren Ergebnisse in einer einheitlichen Behandlungsweise zusammenfaßt. Verf. beschäftigt sich nämlich mit den Resultaten, die lauter aus den beiden Tatsachen hergeleitet werden können, daß es sich um Polynome handelt, und daß die Folge der Polynome bezüglich einer vorgegebenen Belegung ein Orthogonalsystem bilden; viele Sätze über spezielle Orthogonalpolynomsysteme können so wesentlich einfacher und logisch durchsichtiger bewiesen werden.

In Kapitel I sind die grundlegenden Eigenschaften der Orthogonalpolynome behandelt: Rekursionsformel, Lage der Nullstellen, die Gauß-Jacobische Quadraturformel, die Markoff-Stieltjessche Ungleichung, elementare Abschätzungen, klassische orthogonale Polynome. Kapitel II beschäftigt sich mit den Elementen der Theorie des Hamburger-Stieltjesschen Momentenproblems: Lösbarkeit, Bedingungen für die Eindeutigkeit, Zusammenhang zwischen der Eindeutigkeit des Momentenproblems und der Approximation durch Polynome, die Vollständigkeit des Orthogonalpolynomensystems, Eindeutigkeitskriterium von M. Riesz. Kapitel III behandelt die Quadraturverfahren und Interpolation über die Nullstellen der Orthogonalpolynome, Kapitel IV aber die Konvergenz- und Summationstheorie der Orthogonalpolynomreihen. Endlich, in Kapitel V, ist die Theorie von G. Szegő betrachtet: die Orthogonalpolynome auf dem Einheitskreise, die Szegősche Extremumaufgabe, Hardyklassen, Asymptotik der Orthogonalpolynome.

Am Ende des Buches befinden sich ein Nachwort über offene Probleme, eine Bibliographie und ein Namen- und Sachverzeichnis. Am Ende der einzelnen Kapitel gibt es auch historische Bemerkungen und Aufgaben. Als Vorkenntnis werden — außer den üblichen Grundlagen der Analysis — nur die Elemente der reellen und komplexen Funktionentheorie vorausgesetzt.

K. Tandori (Szeged)

Kurt Schütte, Vollständige Systeme modaler und intuitionistischer Logik (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 42), VI+87 pages, Berlin—Heidelberg—New York, Springer-Verlag, 1968.

The monograph discusses extensions to predicate calculus of the propositional calculi M of von Wright and S 4 of Lewis. The semantics of these extensions is defined by the method of Kripke and a consistency and a completeness proof are given, the latter also providing a decision procedure for the propositional parts of the systems. A less constructive but simpler completeness proof based on Henkin's ideas is also given.

The Kripke semantics of the intuitionistic predicate calculus is given by its imbedding in the above-mentioned extension of S 4. A comparison between this method and Beth's is made. The book is concluded by a special account of modal systems of propositional calculus.

A. Máté (Szeged)

Paul Lorenzen, Einführung in die operative Logik und Mathematik (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 78), second edition, 298 pages, Berlin—Heidelberg—New York, Springer-Verlag, 1969.

This second edition is, apart from the correction of some minor typographical errors and a slight change of the notational framework by adapting it to recent literature on the subject, an unchanged reprint of the first one published in 1955.

The book consistently and comprehensively elaborates a new way to the foundation of mathematics. The effectiveness of this method, as regards the provability of theorems, lies somewhere between intuitionism and classical mathematics. The approach to the problems of foundations is motivated by the philosophical principle that mathematics is a study of calculi of finite systems; thus the theorems of a mathematical discipline are considered as strings of a finite number of signs that are deducible with the aid of certain given starting strings and transformation rules. This may immediately recall the formalistic method by its treatment of mathematical disciplines as, in fact, a logical calculus on systems of axioms; nevertheless, there are very essential differences. Indeed, as regards the formalistic approach, it can be said that the use of the calculi on axiom systems is only descriptive of the discipline in question, whereas in the operative method the discipline itself is considered as the calculus. It should not be forgotten either that the former way gives logics an extra treatment, as this consists of the rules of the game on axiom systems, while the latter builds up logics within its operative framework. Thus Lorenzen's approach definitely has an advantage over formalism in that its edifice is not threatened by contradictions; though this is not obtained without price.

The work contains accounts of the operative treatment of logics, arithmetics, a substitute, called "layers of language", for either a higher-order language or set theory, analysis (essentially leaving intact the strength of the classical approach to analysis, especially as far as applications are concerned), and abstract mathematics; this last part deals with the merits of the axiomatic method within the operative framework. *A. Máté* (Szeged)

Andrew H. Wallace, Differential Topology, First Steps, XI + 130 pages, W. A. Benjamin, Inc., New York—Amsterdam, 1968.

The interest in differential topology is considerably increasing even among those who are not working in this field since it seems to become indispensable for several theories. A textbook on differential topology, however, should presuppose familiarity with algebraic topology to an extent which is not general. With these facts in mind the author has selected some topics in differential topology which admit a less technical approach, and composed of them this introduction.

The first chapter contains the prerequisites from point set topology. The second one, starting with differentiable maps in euclidean spaces, gives the definition of differentiable manifolds and of differentiable manifolds with boundary. Submanifolds are defined and a sketchy proof of the theorem on embedding a differentiable manifold in a euclidean space is given in the third chapter. Critical points of differentiable functions on differentiable manifolds are defined in the fourth chapter and a stronger embedding theorem is formulated, stating that a differentiable manifold with a differentiable function on it, having only non-degenerate critical points and finite in number, can be embedded in a euclidean space in such a way that the function will coincide with one of the coordinate functions. Neighborhoods of critical and non-critical levels of differentiable functions on differentiable manifolds with boundary are considered in the fifth chapter. These are treated as levels of coordinate functions of euclidean spaces on their differentiable submanifolds. The change of a non-critical level manifold when passing a non-degenerate critical level is considered as the result of an operation, called spherical modification, in the sixth chapter. The importance of this operation is illustrated by several theorems and examples. As an application of results on critical points, especially of theorems about spherical modifications the compact 2-dimensional manifolds are classified in the seventh chapter. The eighth one contains ideas such as killing of homotopy classes, complementary modifications and cancellation, to indicate in what direction can the subject be developed further.

As the above summary shows the author treats that part of differential topology which has evolved from MORSE's theory. Stress is laid more on the intuitive geometric ideas and less on tecnicalities; accordingly proofs are sometimes arranged in a sequence of exercises or only motivated. Examples and exercises are added to help and check understanding. The author managed to give, without prerequisites and in a relatively very short space, an overall account of the subject.

J. Szenthe (Szeged)

K. M. Kapp and H. Schneider, Completely O-simple semigroups. An abstract treatment of the lattice of congruences, X+110 pages, W. A. Benjamin, Inc., New York—Amsterdam, 1969.

The monograph contains many new results on completely O-simple semigroups and is a valuable contribution to the theory of this important class of semigroups.

Let S be a completely O-simple semigroup and let $\mathfrak{C}$ denote the lattice of all congruences on S. Let $(a)_l$, $(a)_r$ and (a) denote the principal left ideal, the principal right ideal and the principal two-sided ideal generated by a. Moreover, let $\mathscr{L}, \mathscr{R}, \mathscr{F}, \mathscr{H}$ and $\mathscr{D}$ be the Green's relations defined by $a \mathscr{L} b \Leftrightarrow (a)_l = (b)_l$, $a \mathscr{R} b \Leftrightarrow (a)_r = (b)_r$, $a \mathscr{F} b \Leftrightarrow (a) = (b)$ for all a, b ($\in S$), and $\mathscr{H} = \mathscr{L} \cap \mathscr{R}$ $\mathscr{D} = \mathscr{L} \circ \mathscr{R} (= \mathscr{R} \circ \mathscr{L})$. For a fixed $\mathscr{H}$-class H of S, which is a nonzero group, let $\mathfrak{N}$ be the lattice of all normal subgroups of H. Furthermore, let $\mathfrak{L}$ and $\mathfrak{R}$ denote the lattices of all equivalence relations on the set of all $\mathscr{L}$-classes and on the set of all $\mathscr{R}$-classes, respectively. By the Main Theorem of the first part of the book $\mathfrak{C}$ is isomorphic to a complete sublattice of the Cartesian product $\mathfrak{R} \times \mathfrak{N} \times \mathfrak{L}$. In § 9 necessary and sufficient conditions for the existence of a Brandt congruence on S are given and the sublattice of $\mathfrak{C}$ consisting of all Brandt congruences is studied. The later sections of the book are devoted to the study of chains in $\mathfrak{C}$ and it is proved that $\mathfrak{C}$ is an upper semimodular lattice and hence $\mathfrak{C}$ satisfies the Jordan-Dedekind chain condition. § 12 deals with the matrix representation of completely O-simple semigroups.

I. Peák (Szeged)

I. G. Macdonald, Algebraic Geometry: Introduction to Schemes (Mathematics Lecture Note Series), 113 pages, New York—Amsterdam, W. A. Benjamin, Inc., 1968.

Based on a series of lectures delivered at the University of Sussex in 1964—65, this book presents a brief introduction to the language of schemes. It is of primary interest to postgraduates in classical geometry, and is useful as well to pure mathematicians. An elementary knowledge of algebra and topology is assumed. Contents: Introduction. Noetherian spaces. The spectrum of a commutative ring. Presheaves and sheaves. Affine schemes. Preschemes. Operations of sheaves, quasi-coherent and coherent sheaves. Sheave cohomology. Cohomology and affine schemes. The Riemann-Roch theorem. Bibliography.

F. Klein, Vorlesungen über höhere Geometrie (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 22), Nachdruck, VIII+405 Seiten, Berlin, Springer-Verlag, 1968.

Nachdruck der von W. Blaschke herausgegebene dritte Auflage, die in diesen *Acta*, 3 (1927), S. 68, schon besprochen wurde.

F. Klein, Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 26), Nachdruck, XII+326 Seiten, Berlin, Springer Verlag, 1968.

Nachdruck der in diesen *Acta*, 4 (1928—29), S. 189—190, schon besprochene Originalausgabe.

LIVRES REÇUS PAR LA RÉDACTION

G. Alexits—E. Fenyő, *Les méthodes mathématiques en chimie*, 427 pages, Budapest, Akadémiai Kiadó — Paris, Masson et Cie, 1969.

American Mathematical Society Translations. Series 2. Vol. 77: Fourteen papers on series and approximation, IV+266 pages, Providence, R. I., American Mathematical Society, 1968. — $ 13,60.
Vol. 78: Eleven papers on topology, IV+251 pages, Providence, R. I., American Mathematical Society, 1968. — $ 12,80.
Vol. 79: Thirteen papers on functional analysis and differential equations, IV+269 pages, Providence, R. I., American Mathematical Society, 1969. — $ 13,80.
Vol. 80: Thirteen papers on functions of real and complex variables, IV+278 pages, Providence, R. I., American Mathematical Society, 1969. — $ 14,20.
Vol. 81: Four papers on functions of real variables, IV+280 pages, Providence, R. I., American Mathematical Society, 1969. — $ 14,20.

D. V. Anosov, Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature (Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, No. 90 (1967)), IV+235 pages, Providence, R. I., American Mathematical Society, 1969. — $ 15,20.

V. I. Arnold—A. Avez, Ergodic problems of classical mechanics (The Mathematical Physics Monograph Series), IX+286 pages, New York—Amsterdam, Benjamin, Inc., 1968.

M. Atiyah, K-Theory, II+166 pages, New York—Amsterdam, Benjamin, Inc., 1967.

H. Bass, Algebraic K-theory, XIX+762 pages, New York—Amsterdam, Benjamin, Inc., 1968. — $ 12,50.

Beiträge zur Graphentheorie, vorgetragen auf dem internationalen Kolloquium in Manebach vom 9.—12. Mai 1967, 394 Seiten, Leipzig, Teubner, 1968. — M 15,50.

J. L. Bell—A. B. Slomson, Models and ultraproducts, IX+322 pages, Amsterdam—London, North-Holland Publ. Co., 1969. — Hfl. 36,—

O. Bottema—R. Z. Djordjavić—R. R. Janić—D. S. Mitrinović—P. M. Vasić, Geometric inequalities, 151 pages, Groningen, Wolters-Noordhoff Publ., 1969. — Dfl. 17,50.

I. Bucur—A. Deleanu, Introduction to the theory of categories and functions (Pure and Applied Mathematics, Vol. 19), X+224 pages, London—New York—Sydney—Toronto, Wiley—Interscience Publ., 1968. — 100 s.

K. Chandrasekharan, Introduction to analytic number theory (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 148), VIII+140 pages, Berlin—Heidelberg—New York, Springer-Verlag, 1968. — DM 28,—

Contests in Higher Mathematics, Hungary, 1949—1961 in memoriam Miklós Schweitzer, edited by G. Szász, L. Gehér, I. Kovács, L. Pintér, 260 pages, Budapest, Akadémiai Kiadó, 1968.

A. Delachet, Le calcul tensoriel (Que sais-je? Le point des connaissances actuelles, No. 1336), 128 pages, Paris, Presses Universitaires de France, 1969.

H. Federer, Geometric measure theory (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 153), XIV+767 pages, Berlin—Heidelberg—New York, Springer-Verlag, 1969. — DM 118,—

Funktionanalytische Methoden der numerischen Mathematik (Internationale Schriftenreihe zur numerischen Mathematik, Vol. 12), herausgegeben von L. Collatz und H. Unger, 143 Seiten, Basel—Stuttgart, Birkhäuser Verlag, 1969. — Sfr. 24,—

J. Giraud—A. Grothendieck—S. L. Kleiman—M. Raynaud—J. Tate, Dix exposés sur la cohomologie des schémas (Advanced Studies in Pure Mathematics, Vol. 3), VIII+386 pages, Amsterdam, North-Holland—Paris, Masson et Cie, 1968. — Hfl. 72,—

B. W. Gnedenko—J. K. Beljajew—A. D. Solowjew, Mathematische Methoden der Zuverlässigkeitstheorie. I-II (Mathematische Lehrbücher und Monographien, II. Abteilung: Mathematische Monographien, Bd. 21—22), XII+220, VIII+262 Seiten, Berlin, Akademie-Verlag, 1968. M 24, —+28,—

I. C. Gohberg—M. G. Krein, Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators (Translations of Mathematical Monographs, Vol. 18), XIV+378 pages, Providence, R. I., American Mathematical Society, 1969. — $ 21,40.

M. J. Greenberg, Lectures on forms in many variables (Mathematics Lecture Note Series), IX+167 pages, New York—Amsterdam, Benjamin, Inc., 1969. — $ 12,50.

A. Grothendieck, Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux (SGA 2) (Advanced Studies in Pure Mathematics, Vol. 2), X+287 pages, Amsterdam, North-Holland—Paris, Masson et Cie, 1968. — Hfl. 55,—

Z. Harris, Mathematical structures of language (Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 21), IX+230 pages, New York—Toronto—Sydney—London, Interscience Publ., 1968. — 112 s.

F. Hausdorff, Nachgelassene Schriften, Bd. I-II. Studien und Referate, herausgegeben von G. Bergmann, XXI+538, IX+570 Seiten, Stuttgart, B. G. Teubner, 1969. — DM 122,—

G. Helmberg, Introduction to spectral theory in Hilbert space (North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 6), XIII+346 pages, Amsterdam—London, North-Holland Publ., 1969. — Hfl. 60,—

A. Ionescu Tulcea—C. Ionescu Tulcea, Topics in the theory of lifting (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. 48), X+188 pages, Berlin—Heidelberg—New York, Springer-Verlag, 1969. — DM 36,—

J. -L. Krivine, Théorie axiomatique des ensembles (Les précis de l'enseignement supérieur. Le mathématicien), 120 pages, Paris, Presses Universitaires de France, 1969.

J. Nagata, Modern general topology (Bibliotheca Mathematica, Vol. 7), VIII+353 pages, Amsterdam—Groningen, North-Holland—Wolters—Noordhoff Publ., 1968. — Hfl. 48,—

R. Narasimhan, Analysis on real and complex manifolds (Advanced Studies in Pure Mathematics, Vol. 1), X+246 pages, Amsterdam, North-Holland—Paris, Masson et Cie, 1968. — Hfl. 50,—

Numerische Mathematik. Differentialgleichungen. Approximationstheorie (Internationale Schriftenreihe zur numerischen Mathematik, Vol. 9), herausgegeben von L. Collatz, G. Meinardus und H. Unger, 401 Seiten, Basel—Stuttgart, Birkhäuser Verlag, 1968. — Sfr. 48,—

R. S. Palais, Foundations of global non-linear analysis (Mathematics Lecture Note Series), VII+131 pages, New York—Amsterdam, Benjamin, Inc., 1968. — $ 3,95.

W. Parry, Entropy and generators in ergodic theory (Mathematics Lecture Note Series), XII+124 pages, New York—Amsterdam, Benjamin, Inc., 1969. — $ 10,50.

Publications Mathématiques (The Mathematics Journal of the Institut des Hautes Etudes Scientifiques), Vol. 32—33, 340+155 pages, New York, Benjamin Inc., 1967. — $ 15,75+7,75.

Yu. N. Rabotnov, Creep problems in structural members (North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 7), XIV+822 pages, Amsterdam—London, North-Holland Publ., 1969. — Hfl. 120,—

J. W. Robbins, Mathematical Logic (University Mathematics Series), XII+212 pages, New York—Amsterdam, Benjamin, Inc., 1969. — $ 12,50.

P. Rosenstiehl—J. Mothes, Mathematics in management, XVI+392 pages, Amsterdam, North-Holland Publ., 1968. — Hfl. 45,—

L. Sario—K. Oikawa, Capacity functions (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 149), XVII+361 pages, Berlin—Heidelberg—New York, Springer-Verlag, 1969. — DM 96,—

G. Scorza Dragoni, Elementi di analisi mathematica, Vol. 3. La teoria elementare dell'integrazione, 3. ed., IV+582 pages, Padova, Casa Editrice Dott. Antonio Milani, 1969.

C. J. Scriba, The concept of number (Hochschulskriften 825/825 a), VI+216 Seiten, Mannheim-Zürich, Bibliographisches Institut, 1968.

Theory of Finite Groups, A Symposium, edited by R. Brauer and Chih-Han Sah, XIII+203 pages New York—Amsterdam, Benjamin, Inc., 1969. — $ 12,50.

Transport Theory (SIAM-AMS Proceedings, Vol. 1), editors R. Bellman, G. Birkhoff and I. Abu-Shimays, VIII+327 pages, Providence, R. I., 1969. — $ 11,—

A. Wallace, Differential topology, XIV+130 pages, New York, Benjamin, Inc., 1968. — $ 3,95.

INDEX — TARTALOM

ACTA SCIENTIARUM MATHEMATICARUM

SZEGED (HUNGARIA), ARADI VÉRTANÚK TERE 1

On peut s'abonner à l'entreprise de commerce des livres et journaux „Kultúra" (Budapest I., Fő utca 32).

INDEX: 26 024

69-7284 — Szegedi Nyomda

Felelős szerkesztő és kiadó: Szőkefalvi-Nagy Béla
A kézirat nyomdába érkezett: 1969. *május hó*
Megjelenés: 1969. december hó

Példányszám: 1000. Terjedelem: 15 (A/5) ív
Készült monószedéssel, íves magasnyomással, az MSZ 5601-24 és az MSZ 5602-55 szabvány szerint